

JANIA DUHA

## **MODELAGEM E APLICAÇÕES DO EFEITO INVERNO-VERÃO**

Em sessão pública de Defesa de Tese, iniciada às quatorze horas e trinta minutos, nesta data, após um Seminário sobre o assunto da Tese e arguição pela Banca, esta decidiu atribuir **Conceito A**.

Curitiba, 11 de abril de 1996

Banca Examinadora:

Prof. Germano Bruno Afonso

Prof. Roberto Vieira Martins

Prof. Rodney da Silva Gomes

CURITIBA

1996

Dissertação apresentada ao  
Curso de Pós-Graduação em Física,  
Setor de Ciências Exatas,  
Universidade Federal do Paraná,  
como requisito parcial à obtenção do grau de  
Mestre em Ciências



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA


**ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DA SRA. JANIA DUHA**

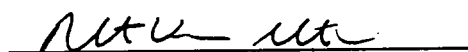
**TÍTULO DA TESE: "MODELAGEM E APLICAÇÕES DO EFEITO INVERNO/VERÃO"**

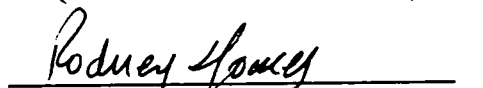
**Em sessão pública de Defesa de Tese, iniciada às quatorze horas e trinta minutos, nesta data, após um Seminário sobre o assunto da Tese e arguição pela Banca, esta decidiu atribuir Conceito A.**

**Curitiba, 11 de abril de 1996**

**Banca Examinadora:**

  
**Prof. Germano Bruno Afonso**  
**Presidente/Orientador - UFPR**

  
**Prof. Roberto Vieira Martins**  
**(Observatório Nacional)**

  
**Prof. Rodney da Silva Gomes**  
**(Observatório Nacional)**

## **DEDICATÓRIA**

Para todos que tornaram este trabalho possível, e em especial para meu orientador Germano B. Afonso pelo apoio e compreensão constantes.

## RESUMO

Neste trabalho apresentamos o modelo de reemissão térmica, obtemos a expressão geral para a força Inverno-Verão e analisamos alguns casos particulares de interesse para este estudo. À seguir, procedemos a uma análise dos principais parâmetros físicos envolvidos, com o objetivo de adquirirmos uma melhor compreensão de como a força Inverno-Verão age fisicamente.

Aplicamos a força Inverno-Verão a um corpo-teste e comparamos resultados analíticos com integrações numéricas. Além disso, efetuamos uma comparação do efeito Inverno-Verão com outros efeitos não-gravitacionais como o efeito Yarkovsky, Poynting-Robertson e Noite-Dia (Yarkovsky Generalizado), analisando suas possíveis aplicações em problemas atuais.

Como resultado adicional obtemos uma força nova, consequência da generalização do efeito Yarkovsky, que é complementar ao efeito Inverno-Verão. Mostramos, também, que estas duas forças térmicas (Inverno-Verão e Yarkovsky Generalizada) somadas resultam na Força Térmica Total, que possibilita a aplicação simultânea desses dois efeitos.

## ÍNDICE

<b>Introdução</b> .....	1
-------------------------	---

### **Capítulo 1 - Modelagem do Efeito Inverno-Verão**

1.1 O Efeito Inverno-Verão .....	5
1.2 Efeitos de Reemissão Térmica .....	6
1.3 O Modelo de Reemissão Térmica .....	9
1.4 Arrasto Térmico: Força Resultante .....	18
1.5 Ângulo de Atraso .....	21
1.6 Efeito Inverno-Verão sem Ângulo de Atraso .....	25
1.7 Efeito Inverno-Verão com Ângulo de Atraso .....	27
1.8 Eixo de Rotação no Plano Orbital .....	28
1.8.1 A Força Inverno-Verão e as Equações de Gauss .....	32
1.9 Eixo de Rotação com Orientação Arbitrária .....	36
1.9.1 Aceleração Transversal S .....	37

### **Capítulo 2 - Análise dos Parâmetros Físicos**

2.1 Aceleração Radial e Transversal versus Distância à Fonte .....	41
2.2 Aceleração Radial e Transversal versus Raio do Corpo .....	41
2.3 Ângulo de Atraso versus Distância à Fonte .....	42

## **Capítulo 3 - Comparação com Outros Efeitos**

3.1 Efeito Yarkovsky .....	54
3.2 Efeito Noite-Dia .....	56
3.3 Efeito Poynting-Robertson .....	59

## **Capítulo 4 - Aplicações**

4.1 O Problema de Dois Corpos com a Perturbação Inverno-Verão .....	64
4.2 O Problema de Três Corpos com a Perturbação Inverno-Verão .....	65
<b>Discussão .....</b>	<b>70</b>
<b>Conclusão .....</b>	<b>72</b>
<b>Apêndice 1 - Energia de Colisão versus Ângulo de Impacto .....</b>	<b>73</b>
<b>Apêndice 2 - O Problema de Três Corpos com Perturbação Não-Gravitacional ...</b>	<b>76</b>
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>81</b>

## INTRODUÇÃO

O efeito Inverno-Verão é um efeito térmico, consequência de uma distribuição anisotrópica de temperaturas na superfície do corpo. É um efeito simples, presente no nosso cotidiano: quase todos os corpos quando expostos à uma fonte de radiação térmica, sofrem a ação de uma força chamada *Força Inverno-Verão* que é consequência desse efeito. A ação dessa força, em geral, é mais sensível no decorrer de períodos longos, uma vez que sua ordem de grandeza é pequena, o que dificulta a observação direta do fenômeno em si, apesar dele estar presente em quase tudo que nos cerca.

Em termos de dinâmica orbital torna-se de fundamental importância para a compreensão dos mecanismos que afetam a órbita de um fragmento de asteróide, ou o núcleo de um cometa extinto, por exemplo. Tem lugar, também, na formação do nosso Sistema Solar cuja origem estaria ligada à NSP (Nebulosa Solar Primitiva). A NSP teve suas linhas gerais propostas por Laplace, em 1796. A matéria interestelar da nuvem, ao se agrupar em grãos através de colisões sucessivas, formaria gradativamente, objetos de dimensões asteroidais e, por processo análogo, os planetas.

Visando explicar a existência de asteróides nos dias de hoje, alguns físicos defendem a idéia de que apenas uma parte desse material teria se agrupado, o restante teria sobrevivido as colisões dando origem ao aglomerado de material asteroidal, à aproximadamente 2.8 U.A. do Sol, conhecido como o Cinturão de Asteróides. De forma semelhante se explicaria a existência da nuvem de Oort onde se concentraria parte do material original da NSP. Os NEOs, Near Earth Objects, pertencem ao grupo de cor-



pos celestes com maior probabilidade de impacto com a Terra. Com o aprimoramento das técnicas de observação de objetos próximos à Terra, aumenta o número de NEOS detectados, e crescem as discussões em torno do perigo representado por esses objetos. Em 1992, 20 novos NEOS (Near-Earth Objects) foram registrados somando um total de 163. O censo, no entanto, é incompleto para objetos com dimensões menores do que 8 km (Ivar, o maior asteroide próximo à Terra já observado, tem aproximadamente 8 km de diâmetro). Estima-se que apenas 0,1% dos objetos com diâmetro menor do que 100 m são conhecidos [5], restando portanto, os outros 99,9%, dos quais não temos registros.

Para os objetos cuja origem está associada ao cinturão de asteroides entra em discussão a causa do deslocamento desses corpos para posições próximas à Terra. Uma explicação possível está na ação da ressonância 3:1 com Júpiter que aumenta a excentricidade da órbita [10]-[11] trazendo o asteroide para regiões próximas de Marte quando eventualmente, terá sua órbita modificada e passará a pertencer ao grupo de asteroides do tipo Apolo \*. A ressonância secular, também, tem sido citada como uma explicação para o deslocamento desses fragmentos para posições próximas à Terra [9]. Resta, porém, explicar como esses corpos são lançados para as regiões de ressonância ? Para os objetos maiores uma explicação possível está nos impactos que ocorrem no próprio cinturão de asteroides, com subsequente lançamento de fragmentos para as regiões de ressonância [6]. No caso de fragmentos menores (com dimensões na ordem de grandeza do metro), os efeitos de reemissão térmica, como por exemplo o efeito Yarkovsky [7], representam uma possibilidade de explicação do fenômeno.

Atualmente, devido ao interesse crescente da comunidade científica, e da população em geral, pelo perigo em potencial que objetos próximos à Terra representam para a nossa segurança, aumentam os esforços no sentido de compreender as forças que atuam nesses objetos, determinando mudanças em suas órbitas, e lançando-os para regiões onde as probabilidades de impacto são significativas.

A probabilidade de impacto com a Terra, para objetos com dimensões na

---

\* Os asteroides do tipo Apolo possuem órbitas excêntricas com afélio no cinturão de asteroides e periélio menor do que 1 U.A.; são importantes porque cruzam a órbita da Terra.

ordem do km, capazes de promover um desastre global não é desprezível e, pode ser comparada em potencial destrutivo à diversos problemas enfrentados pela humanidade, hoje [5]. No entanto, corpos menores tem probabilidades muito mais significativas, uma vez que, seu número é muito maior, com potencial de colisão capaz de representar um perigo *real*, principalmente, para impactos com grandes cidades. No apêndice calculamos a energia liberada no impacto para um corpo metálico com 10 m de diâmetro e mostramos como essa energia varia em função do ângulo de colisão com a Terra.

Em 1989 o asteróide 1989FC, cujo potencial de impacto é de 1.000 megatons ( $1 \text{ MT} = 4.2 \times 10^{15} \text{ J}$ ), passou próximo à Terra (distância: menor do que 2 vezes a distância Terra-Lua), reacendendo as discussões sobre o perigo de uma possível colisão com a Terra e, suas consequências. Em seu artigo [5], Chapman e Morrison, procuram alertar, basicamente, para o fato de que a importância de determinado evento não reside apenas na probabilidade deste ocorrer, mas também, na magnitude dos danos causados (número de vidas perdidas, consequências a longo prazo para o ecossistema, etc.) caso venha a ocorrer.

Dentre as forças não-gravitacionais responsáveis por perturbações na órbita de um meteoróide, as forças de reemissão térmica tem um papel importante no processo responsável pelo surgimento de novos NEOS, oferecendo uma possibilidade de explicar, como objetos distantes podem ter suas órbitas alteradas, à ponto de cruzarem a órbita da Terra. Inverno-Verão, Yarkovsky e Poynting-Robertson são exemplos desse tipo de força que existe, basicamente, devido ao fato de que os corpos celestes possuem inércia térmica, e estão em constante movimento em relação à fonte de radiação.

No primeiro capítulo deste trabalho apresentamos o modelo de reemissão térmica, modelamos o efeito Inverno-Verão e o efeito complementar Yarkovsky Generalizado. Obtemos a força Inverno-Verão para o sistema cartesiano (xyz) centrado no corpo-teste, e em seguida para o sistema osculador (rsw). À seguir, obtemos a aceleração Inverno-Verão para o caso especial em que o eixo de rotação do corpo se encontra no plano, e para o caso geral quando o eixo de rotação pode ter orientação arbitrária. Uma vez que, a força Inverno-Verão é uma força nova, pouco conhecida, necessitamos compreender como ela age fisicamente. No segundo capítulo procedemos, então, a uma

análise de alguns dos parâmetros físicos envolvidos, tais como: ângulo de atraso, raio do corpo, distância à fonte de radiação, etc.

No terceiro capítulo obtemos a força Yarkovsky e a força Yarkovsky Generalizada, a partir do modelo térmico apresentado. Comparamos os efeitos Inverno-Verão, Yarkovsky, Yarkovsky Generalizado e Poynting-Robertson através do módulo da componente transversal média da aceleração. No quarto capítulo aplicamos a força Inverno-Verão a um corpo-teste e acompanhamos a evolução dinâmica de seus elementos orbitais, comparando resultados analíticos com integrações numéricas.

## CAPÍTULO 1

### MODELAGEM DO EFEITO INVERNO-VERÃO

#### 1.1 O Efeito Inverno - Verão

Quando o eixo de rotação do corpo não é perpendicular ao plano orbital da fonte de energia radiante (movimento aparente da fonte no sistema de referencia do corpo), o dia em um hemisfério possui um período mais longo do que a noite. No outro hemisfério acontece exatamente o fenômeno inverso, a noite é mais longa do que o dia. Vemos então, que quando o eixo de rotação do corpo é perpendicular ao plano orbital do Sol o dia e a noite terão períodos iguais em ambos os hemisférios, como acontece no dia dos equinócios para a Terra. No hemisfério mais iluminado haverá mais absorção e reemissão de energia radiante. Em consequência, teremos uma distribuição de temperaturas, na superfície do corpo, mais significativa, e chamaremos este hemisfério de hemisfério verão. No outro hemisfério ocorrerá o oposto e, teremos então o hemisfério inverno. Se o hemisfério verão reemite mais energia radiante do que o hemisfério inverno, temos uma força de radiação adicional que impele o corpo na direção de seu eixo de rotação, com sentido do hemisfério verão para o hemisfério inverno. Este é o efeito Inverno-Verão.

Este efeito sazonal depende de forma crucial da geometria spin-órbita. Se o eixo de rotação é normal ao plano orbital, o efeito é nulo. Se o eixo de rotação se encontra ao longo do plano orbital, paralelo à direção de incidência da radiação, o efeito é máximo.

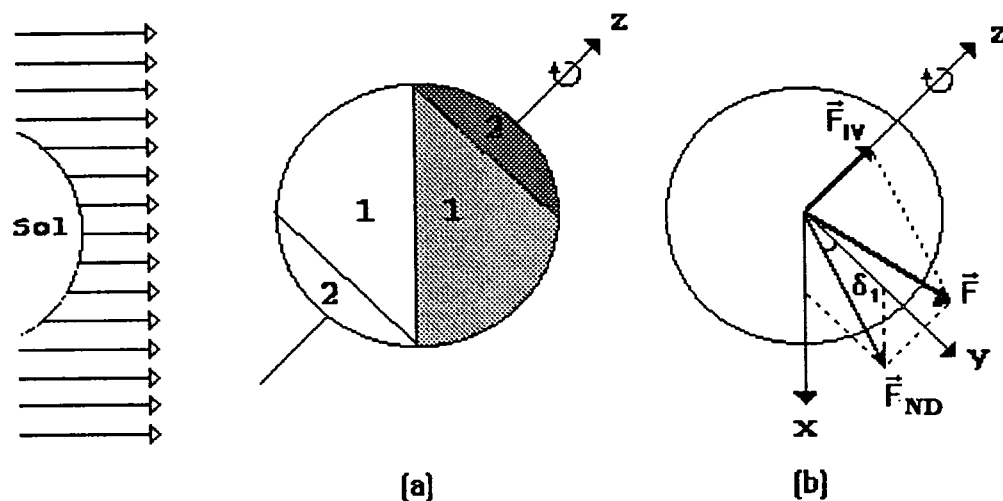


Figura 1.1 - A Força de Reemissão Térmica

## 1.2 Efeitos de Reemissão Térmica

Quando, energia radiante proveniente de uma fonte incide sobre a superfície de um corpo, é parcialmente absorvida, transforma-se em calor e em seguida é reemitida. O corpo aquecido emite radiação com espectro de frequências proporcional à sua temperatura. A perda de momento está diretamente ligada à frequência dos fótons emitidos, e portanto, à temperatura do corpo. Quando a temperatura  $T$  é igual para todos os pontos da superfície a perda de momento é a mesma em todas as direções e não há força resultante. No entanto, quando a distribuição de temperaturas é desigual os vetores momento não se cancelam e a força resultante é diferente de zero. Em geral, a reemissão de energia se dá de forma assimétrica (ou seja, os vetores momento não se cancelam) uma vez que o corpo possui inércia térmica e está em movimento.

Neste trabalho o corpo em estudo é esférico, homogêneo, possui movimento de rotação e se encontra em órbita ao redor de uma fonte de energia radiante.

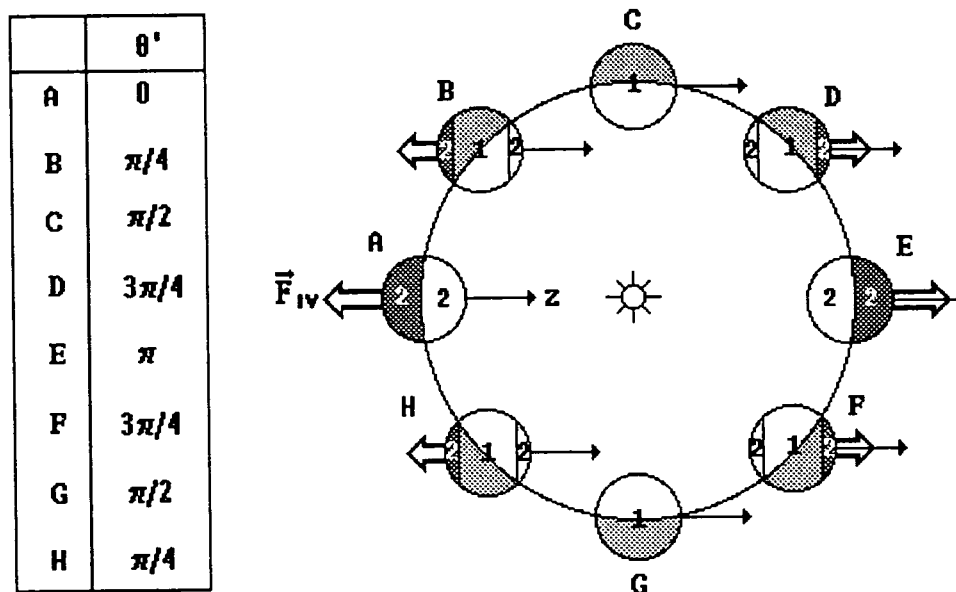


Figura 1.2 - A Força Inverno-Verão versus Colatitude do Sol

A energia irradiada pela fonte irá causar um aumento na temperatura do corpo iniciando assim um processo de reemissão térmica da energia radiante absorvida. Durante este processo o corpo perde momento e surge então uma força térmica.

Quando o eixo de rotação do corpo está inclinado em relação a direção de incidência da radiação podemos distinguir duas regiões diferentes: a região 1 onde os períodos de sombra e de luz se alternam (noite- dia); e a região 2 que, não apresenta alternância entre os períodos de sombra e de luz (só dia ou só noite). Veja a Fig.(1.1) A medida que o corpo se desloca ao longo de sua órbita, a área coberta por 1 e 2 sofre variações, de tal forma que, quando a região 1 aumenta, 2 diminui e vice-versa, Fig.(1.2). Além disso, observe que a duração do dia (ou da noite) na região 1 apresenta uma dependência em relação à colatitude  $\theta'$ .

Para um sistema de referência centrado no corpo a força de reemissão térmica possui componentes em três direções: x, y e z. Chamamos a componente na direção do eixo z (eixo de rotação) de *força Inverno- Verão* ( $\vec{F}_{IV}$ ) e a componente no plano xy de

*força Noite-Dia* ( $\vec{F}_{ND}$ ) ou *Yarkovsky Generalizada*, conforme a Fig.(1.1).

A fim de uma melhor visualização, vamos agora analisar o caso em que o eixo de rotação do corpo se encontra no plano orbital, como mostra a Fig.(1.2). Observe como as regiões 1 e 2 se alternam na superfície do corpo à medida que, este se move ao redor do Sol (fonte de energia). Podemos, à grosso modo, associar as regiões 1 e 2 as forças Noite-Dia e Inverno-Verão, respectivamente. Na Fig.(1.2) associamos a força Inverno-Verão à região 2 e mostramos como ela varia em módulo e direção.

Ao longo de um período orbital, portanto, a intensidade das forças  $\vec{F}_{IV}$  e  $\vec{F}_{ND}$  sofre uma variação cíclica função da colatitude do Sol ( $\sin\theta'$ ,  $\cos\theta'$ ). Teremos pontos em que a força Noite-Dia é nula e a força Inverno-Verão é máxima (A e E) e pontos em que ocorre justamente o contrário (C e G).

### 1.3 O Modelo de Reemissão Térmica

O efeito de reemissão térmica da energia radiante absorvida por um corpo que possui movimento de rotação, e se encontra em órbita ao redor de uma fonte pontual de energia, pode ser compreendido com o auxílio de um modelo que consiste, basicamente, na resolução da equação de condução de calor dependente do tempo [3]. Este modelo é similar ao proposto por Afonso e Foryta (1989), porém com uma formulação matemática mais simples e, oferece resultados mais abrangentes.

Supomos que o corpo é esférico, homogêneo e de raio R. Procuramos então, resolver a equação de condução de calor aplicando as condições de contorno apropriadas de forma a obtermos a distribuição de temperaturas na superfície do corpo.

A equação de condução de calor e as condições de contorno para a superfície são dadas por:

$$\nabla^2 T = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1.3.1)$$

e

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} + \epsilon \sigma T^4 = \alpha I; \quad (1.3.2)$$

Onde:

T - temperatura,

t - tempo,

$\rho$  - densidade de massa do corpo,

$C_p$  - calor específico do corpo à pressão constante,

k - condutividade térmica do corpo,

I - irradiância total,

$\alpha$  - absorvidade de radiação na superfície do corpo,

$\sigma$  - constante de Stefan-Boltzmann,

r - distância radial medida a partir do centro do corpo.



O fluxo que é carregado para fora da superfície por condução e radiação é contrabalanceado pelo fluxo que chega. O corpo irradia como um corpo negro, com emissividade  $\epsilon$ .

A temperatura num dado ponto da superfície do corpo é dada por:

$$T = T_0 + \Delta T; \quad (1.3.3)$$

onde  $T_0$  é a temperatura média e  $\Delta T$  é a variação em relação a média. Temos então:

$$I = I_0 + \Delta I, \quad (1.3.4)$$

ou seja, uma irradiância  $I$  é responsável por um aquecimento  $T$  e  $I_0$  é a irradiância constante da fonte que fornece ao corpo uma temperatura  $T_0$ . A temperatura média está relacionada à irradiância média por:

$$\epsilon \sigma T_0^4 = \alpha I_0. \quad (1.3.5)$$

Se  $\Delta T \ll T_0$ , então temos:

$$T^4 = T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T, \quad (1.3.6)$$

de acordo com a expansão binomial.

Substituindo as equações (1.3.3) em (1.3.1) e a seguir a (1.3.4) em (1.3.2) obtemos:

$$\nabla^2(\Delta T) = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t}, \quad (1.3.7)$$

$$k \frac{\partial(\Delta T)}{\partial r} \Big|_{r=R} + 4\epsilon \sigma T_0^3(\Delta T) = \alpha \Delta I. \quad (1.3.8)$$

Agora suponha que  $\Delta T$  e  $\Delta I$  variam com o tempo de acordo com  $e^{-i\nu t}$ , onde  $i = -1^{1/2}$ , logo podemos escrever

$$\Delta T(r, \theta, \phi, t) = \Delta \hat{T}(r, \theta, \phi) e^{-i\nu t}, \quad (1.3.9)$$

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = \Delta \hat{I}(\theta, \phi) e^{-i\nu t}; \quad (1.3.10)$$

onde  $\nu$  é uma frequência e  $\theta$  é a colatitude e  $\phi$  a longitude.

Neste caso, (1.3.7) resulta em:

$$\nabla^2(\Delta \hat{T}) = -K^2(\Delta \hat{T}); \quad (1.3.11)$$

onde:

$$K^2 = \frac{i\nu\rho C_p}{k}. \quad (1.3.12)$$

Em coordenadas esféricas, (1.3.11) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Delta \hat{T}}{\partial \phi^2} = -K^2 \Delta \hat{T}. \quad (1.3.13)$$

Podemos resolver esta equação usando o método da separação de variáveis.

Se:

$$\Delta \hat{T}(r, \theta, \phi) = A(r)B(\theta)C(\phi), \quad (1.3.14)$$

então, temos:

$$\frac{d^2 C}{d\phi^2} + m^2 C = 0, \quad (1.3.15)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dB}{d\theta} \right) + \left( l(l+1) \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right) B = 0, \quad (1.3.16)$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dA}{dr} \right) + (K^2 r^2 - l(l+1)) A = 0. \quad (1.3.17)$$

E obtemos a seguinte expressão para a eq.(1.3.14):

$$\Delta\hat{T} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} P_l^m(\cos\theta) j_l(Kr) e^{im\phi}; \quad (1.3.18)$$

onde  $P_l^m(\cos\theta)$  são as funções associadas de Legendre (de grau "l" e ordem "m") e  $j_l(Kr)$  é a função esférica de Bessel.

Os coeficientes  $C_{l,m}$  podem ser encontrados se colocarmos  $\Delta\hat{I}(\theta, \phi)$  na forma de uma expansão polinomial de Legendre:

$$\Delta\hat{I}(\theta, \phi) = I_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,m} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}; \quad (1.3.19)$$

onde  $I_0$  é a irradiância da fonte na altitude do corpo e  $f_{l,m}$  são os coeficientes da expansão. Substituindo a eq.(1.3.18) na eq.(1.3.9) e a eq.(1.3.19) na eq.(1.3.10), temos:

$$\Delta T(r, \theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} P_l^m(\cos\theta) j_l(Kr) e^{im\phi} e^{-i\nu t}, \quad (1.3.20)$$

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = I_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,m} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} e^{-i\nu t}. \quad (1.3.21)$$

A seguir, substituindo as eqs.(1.3.20) e (1.3.21) na equação de condição de contorno (1.3.8), obtemos:

$$\begin{aligned} & k \frac{\partial [\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} P_l^m(\cos\theta) j_l(Kr) e^{im\phi} e^{-i\nu t}]}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ & + 4\epsilon\sigma T_o^3 \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{l,m} P_l^m(\cos\theta) j_l(Kr) e^{im\phi} e^{-i\nu t} \right] \\ & = \alpha \left[ I_r \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{l,m} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} e^{-i\nu t} \right], \end{aligned}$$

que resulta em:

$$\left[ k \frac{\partial j_l(Kr)}{\partial r} \Big|_{r=R} + 4\epsilon\sigma T_o^3 j_l(Kr) \right] C_{l,m} = (\alpha I_r) f_{l,m},$$

e, portanto:

$$C_{l,m} = \frac{\alpha I_0 f_{l,m}}{4\epsilon\sigma T_0^3 j_l(KR) + k \frac{\partial j_l(Kr)}{\partial r} \big|_{r=R}}. \quad (1.3.22)$$

Então, a solução linearizada das equações diferenciais (1.3.1) e (1.3.2) é:

$$\Delta T(R, \theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\alpha I_0 f_{l,m} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} e^{-i\nu t}}{4\epsilon\sigma T_0^3 + \frac{k}{j_l(Kr)} \frac{\partial j_l(Kr)}{\partial r} \big|_{r=R}}. \quad (1.3.23)$$

Podemos escrever:

$$\frac{1}{j_l(KR)} \frac{\partial j_l(Kr)}{\partial r} \big|_{r=R} = X + iY, \quad (1.3.24)$$

onde:

$$\frac{1}{j_l(KR)} \frac{\partial j_l(Kr)}{\partial r} \big|_{r=R} = \frac{\partial \ln j_l(Kr)}{\partial r} \big|_{r=R},$$

$$X = \mathcal{R}e \left\{ \frac{1}{j_l(KR)} \frac{\partial j_l(Kr)}{\partial r} \big|_{r=R} \right\},$$

$$Y = \mathcal{I}m \left\{ \frac{1}{j_l(KR)} \frac{\partial j_l(Kr)}{\partial r} \big|_{r=R} \right\}.$$

Substituindo a eq.(1.3.24) na eq.(1.3.23), vemos que:

$$\Delta T(R, \theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{f_{l,m} \alpha I_0 P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} e^{-i\nu t}}{(4\epsilon\sigma T_0^3 + kX) \left( 1 + \frac{kY}{4\epsilon\sigma T_0^3 + kX} \right)}. \quad (1.3.25)$$

A seguir, definindo as seguintes variáveis:

$$\xi = -\frac{kY}{4\epsilon\sigma T_0^3 + kX}, \quad (1.3.26)$$

$$\delta = \arctan \xi; \quad (1.3.27)$$

temos:

$$\Delta T(R, \theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{f_{l,m} \alpha I_0 P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} e^{-i\nu t}}{(4\epsilon\sigma T_0^3 + kX)(1 - i\xi)}. \quad (1.3.28)$$

Mas, como:

$$\frac{1}{1 - i\xi} = \frac{1 + i\xi}{1 + \xi^2} = \frac{e^{i\delta}}{(1 + \xi^2)^{1/2}},$$

obtemos a seguinte expressão para a distribuição de temperaturas na superfície do corpo:

$$\Delta T(R, \theta, \phi, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{f_{l,m} \alpha I_0 P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} e^{-i\nu t} e^{i\delta}}{(4\epsilon\sigma T_0^3 + kX)(1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.3.29)$$

Quando a fonte de energia radiante é pontual apenas os termos  $l = 1$ ,  $m = 0$  e  $m = 1$  são considerados, uma vez que todos os outros termos são nulos. A expressão final para a variação na irradiância pode ser obtida substituindo a eq.(1.3.19) na eq.(1.3.10):

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = I_0 e^{-i\nu t} [f_{1,0} P_1^0(\cos \theta) + f_{1,1} P_1^1(\cos \theta) e^{i\phi}]; \quad (1.3.30)$$

onde  $P_1^0(\cos \theta) = \cos \theta$  e  $P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta$ . E, portanto,

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = I_0 [f_{1,0} \cos \theta e^{-i\nu t} + f_{1,1} \sin \theta e^{i(\phi - \nu t)}]. \quad (1.3.31)$$

A variação na irradiância deve ter uma representação real, logo:

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = I_0 [f_{1,0} \cos \theta \cos \nu t + f_{1,1} \sin \theta \cos(\phi - \nu t)]. \quad (1.3.32)$$

Vamos, agora, encontrar o análogo geométrico da equação acima. No sistema de referência (x,y,z) centrado no corpo, os pontos P (ponto arbitrário na superfície do corpo) e P'(posição aparente do Sol) são representados pelos vetores posição  $\vec{p}$  e  $\vec{p}'$ .

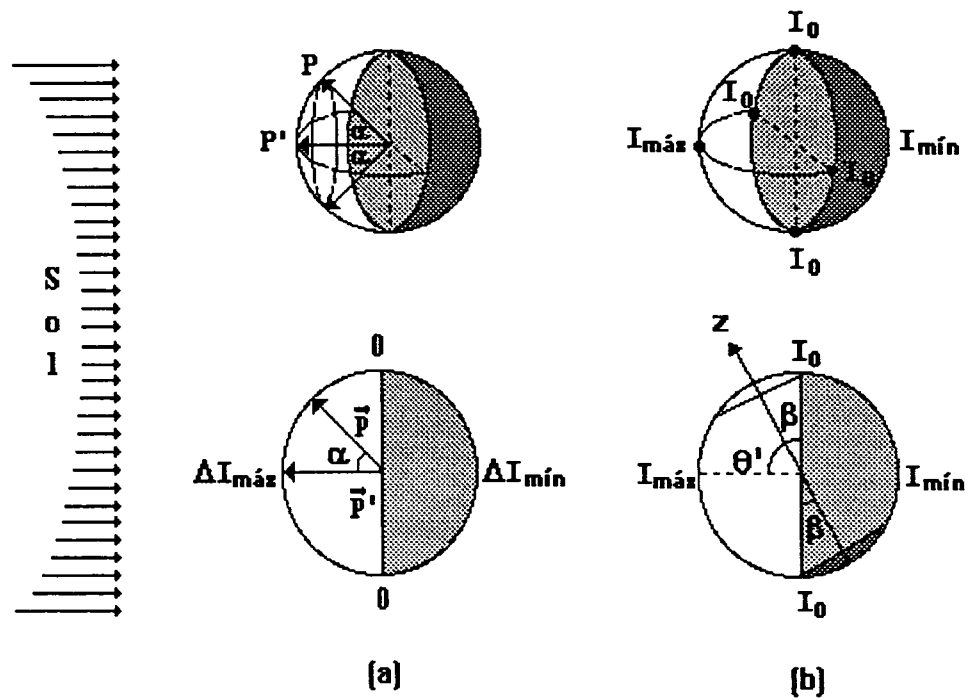


Figura 1.3 Irradiância versus Coordenadas do Ponto

Observe na fig(1.3) que a irradiância varia, de ponto a ponto, e é função do ângulo entre os vetores posição unitários  $\hat{p}$  e  $\hat{p}'$ , de forma que, temos a seguinte relação:

$$I = I_0 + \Delta I(\alpha). \quad (1.3.33)$$

Em coordenadas esféricas temos:

$$\hat{p} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k},$$

$$\hat{p}' = \sin \theta' \cos \phi' \hat{i} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{j} + \cos \theta' \hat{k},$$

$$\cos \alpha = \vec{p} \cdot \vec{p}' = \sin \theta' \sin \theta \cos(\phi - \phi') + \cos \theta' \cos \theta. \quad (1.3.34)$$

A variação na irradiância pode ser expressa da seguinte forma:

$$\Delta I(\alpha) = n_f I_0 \cos \alpha; \quad (1.3.35)$$

onde  $n_f$  é o fator de normalização. Integrando  $\Delta I$  para a região iluminada na superfície do corpo, obtemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta I = \Delta I_{max}, \quad (1.3.36)$$

$$n_f I_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \Delta I_{max}; \quad (1.3.37)$$

e portanto,  $\Delta I_{max} = n_f I_0$ . Aplicando a relação (1.3.34) na eq.(1.3.35) obtemos:

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = n_f I_0 \left[ \underbrace{\cos \theta' \cos \theta}_{\text{Inverno-Verão}} + \underbrace{\sin \theta' \sin \theta \cos(\phi - \phi')}_{\text{Noite-Dia}} \right]; \quad (1.3.38)$$

onde as coordenadas  $(\theta', \phi')$  representam a posição aparente da fonte pontual de energia radiante, para um determinado instante  $t$ .

O primeiro termo da equação está relacionado com o efeito Inverno-Verão, é máximo para  $\theta' = 0$  ( $\cos \theta' = 1$ ), e determina uma assimetria na distribuição de temperaturas ao longo do eixo  $z$ , enquanto que o segundo termo com o efeito Noite-Dia que é máximo para  $\theta' = \frac{\pi}{2}$  ( $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ) e determina uma assimetria no plano  $xy$ . Observe que à medida que o corpo se move ao longo de sua trajetória,  $\cos \theta'$  e  $\sin \theta'$  aumentam ou diminuem a intensidade dos efeitos Inverno-Verão e Noite-Dia. Existe uma relação direta entre a coordenada  $\theta'$  do Sol (posição aparente) e a intensidade das forças Inverno-Verão e Noite-Dia.

Comparando as eqs.(1.3.32) e (1.3.38) obtemos as seguintes relações:

$$f_{1,0} = n_f \quad e \quad f_{1,1} = n_f \sin \theta', \quad (1.3.39)$$

$$\cos \nu t = \cos \theta' \quad e \quad \cos(\phi - \nu t) = \cos(\phi - \phi'). \quad (1.3.40)$$

Um corpo girante em órbita ao redor da fonte de energia radiante apresenta dois movimentos periódicos a serem levados em consideração: o movimento de rotação ( $\nu = \nu_{ro}$ ) e o movimento orbital ( $\nu = \nu_{or}$ ). Para simplificar a análise do problema faremos a suposição de que o eixo de rotação encontra-se no plano orbital do corpo e vamos analisar os dois movimentos individualmente. Quando  $\nu = \nu_{ro}$ ,  $\theta' = cte$ ,  $\phi' = \nu_{ro}t$  e a eq.( 1.3.38) se transforma em:

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = n_f I_0 \left[ \underbrace{\cos \theta' \cos \theta}_{\text{Inverno-Verão}} + \underbrace{\sin \theta' \sin \theta \cos(\phi - \nu_{ro}t)}_{\text{Noite-Dia}} \right]; \quad (1.3.41)$$

onde  $\theta'$  é constante e portanto, somente o efeito Noite-Dia apresenta dependência em relação ao movimento de rotação do corpo.

Quando  $\nu = \nu_{or}$ ,  $\theta' = \nu_{or}t$ ,  $\phi' = cte$  e da eq.(1.3.38) temos:

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = n_f I_0 \left[ \underbrace{\cos \nu_{or}t \cos \theta}_{\text{Inverno-Verão}} + \underbrace{\sin \nu_{or}t \sin \theta \cos(\phi - \phi')}_{\text{Noite-Dia}} \right]; \quad (1.3.42)$$

onde  $\theta'$  não é constante. Neste caso, ambos os efeitos Inverno-Verão e Noite-Dia dependem de  $\nu_{or}$ . Basicamente, temos apenas um efeito Inverno-Verão, que depende fundamentalmente, do movimento orbital do corpo, porém temos dois efeitos Noite-Dia; o primeiro como consequência da existência do movimento de rotação e o segundo como consequência do movimento orbital. A Terra, por exemplo, possui um *noite-dia* com duração de 24 horas e um *noite-dia* com duração de 1 ano.

Considerando, simultaneamente, o movimento orbital e o movimento de rotação do corpo, podemos escrever a eq.(1.3.38) da seguinte forma:

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = n_f I_0 \left[ \underbrace{\cos \nu_{or}t \cos \theta}_{\text{Inverno-Verão}} + \underbrace{\sin \nu_{or}t \sin \theta \cos(\phi - \nu_{ro}t)}_{\text{Noite-Dia}} \right]. \quad (1.3.43)$$



### 1.4 Arrasto Térmico: Força Resultante

Se um corpo emite radiação de acordo com a lei de Lambert, então os fótons emitidos levam consigo momento na razão de

$$d\vec{F} = \frac{-2\epsilon\sigma}{3c} T^4 d\vec{A}; \quad (1.4.1)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz e  $d\vec{A}$  é um vetor elemento de área. Substituindo  $T^4$ , temos:

$$\vec{F} = \frac{-2\epsilon\sigma}{3c} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T) (\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}) R^2 \sin\theta d\theta d\phi. \quad (1.4.2)$$

Os termos  $T_0^4$  são eliminados quando integramos sobre a superfície do corpo, resultando:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{-16\epsilon\alpha\sigma I_0 T_0^3 R^2 e^{-i(\nu t - \delta)}}{3c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{f_{l,m}}{(4\epsilon\sigma T_0^3 + kX)(1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} (\sin\theta \cos\phi \hat{i} + \sin\theta \sin\phi \hat{j} + \cos\theta \hat{k}) \sin\theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

e portanto,

$$\vec{F} = \frac{-8\alpha I_0 R^2 \pi e^{-i(\nu t - \delta)}}{9c \left(1 + \frac{kX}{4\epsilon\sigma T_0^3}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} [f_{1,1}(\hat{i} + i\hat{j}) + f_{1,0}\hat{k}], \quad (1.4.4)$$

A força devida a reemissão da radiação deve ter uma representação real, logo:

$$\vec{F} = \frac{-8\alpha I_0 R^2 \pi}{9c \left(1 + \frac{kX}{4\epsilon\sigma T_0^3}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \underbrace{\{f_{1,1} [\cos(\nu t - \delta)\hat{i} + \sin(\nu t - \delta)\hat{j}]\}}_{\text{Noite-Dia}} + \underbrace{f_{1,0} \cos(\nu t - \delta)\hat{k}}_{\text{Inverno-Verão}}. \quad (1.4.5)$$

Dividindo esta equação pela massa do corpo esférico ( $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$ ) obtemos a seguinte expressão para a aceleração:

$$\vec{a} = B \left\{ \underbrace{f_{1,1} [\cos(\nu t - \delta)\hat{i} + \sin(\nu t - \delta)\hat{j}]}_{\text{Noite-Dia}} + \underbrace{f_{1,0} \cos(\nu t - \delta)\hat{k}}_{\text{Inverno-Verão}} \right\}; \quad (1.4.6)$$

onde:

$$B = \frac{-2\alpha I_0}{3\rho c R \left(1 + \frac{kX}{4\epsilon\sigma T_0^3}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.4.7)$$

Temos portanto, uma força resultante com duas componentes. Uma no plano xy do corpo (equatorial) e outra na direção do eixo z (spin). A primeira força é devida ao efeito Noite-Dia e a segunda ao efeito Inverno-Verão. Usando a eq.(1.4.6) e a relação (1.3.39) podemos escrever:

$$\vec{a}_{IV} = n_f B_2 \cos(\theta' - \delta_2)\hat{k}, \quad (1.4.8)$$

$$\vec{a}_{ND} = n_f B_1 \sin(\theta' - \delta_2) [\cos(\phi' - \delta_1)\hat{i} - \sin(\phi' - \delta_1)\hat{j}]; \quad (1.4.9)$$

onde:

$$B_1 = \frac{-2\alpha I_0}{3\rho c R \left(1 + \frac{kX_1}{4\epsilon\sigma T_0^3}\right) (1 + \xi_1^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.4.10)$$

$$B_2 = \frac{-2\alpha I_0}{3\rho c R \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_0^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.4.11)$$

portanto, a expressão geral para a aceleração é dada por:

$$\vec{a} = n_f \{ B_1 \sin(\theta' - \delta_2) [\cos(\phi' - \delta_1)\hat{i} - \sin(\phi' - \delta_1)\hat{j}] + B_2 \cos(\theta' - \delta_2)\hat{k} \}; \quad (1.4.12)$$

onde  $\delta_1$  é o ângulo de atraso para o movimento de rotação;  $\delta_2$  é o ângulo de atraso para o movimento orbital do corpo; e  $n_f$  o fator de normalização, cujos valores máximo e mínimo são respectivamente,  $1/2$  e  $1/4$ , como mostramos a seguir na eq.(1.4.13).

A medida que a posição aparente do Sol  $P'(\theta', \phi')$  varia a distribuição de temperaturas na superfície do corpo sofre alterações. O corpo possui inércia térmica e portanto, necessita de um certo tempo finito para passar de uma configuração, ou distribuição, de temperaturas para outra. O movimento orbital do Sol (no referencial do corpo) altera constantemente a distribuição de temperaturas na superfície do corpo em estudo. A cada configuração de temperaturas está relacionado um determinado ângulo  $\theta'$ , que representa a colatitude do Sol, e que irá determinar a intensidade das forças Inverno-Verão e Noite-Dia que o corpo irá sentir depois de um determinado tempo. Devido à inércia térmica o ângulo a ser considerado num determinado instante  $t$  será  $\theta' - \delta_2$ , uma vez que a força que atua no corpo neste instante é devida à distribuição de temperaturas existente num instante anterior (quando a colatitude do Sol era  $\theta' - \delta_2$ ). De forma semelhante, a força relacionada a  $\theta'$  será sentida, apenas, num instante posterior.

Podemos obter o fator de normalização  $n_f$  integrando a eq.(1.3.38) de  $-\beta$  à  $\pi - \beta$ , conforme a Fig.(1.3):

$$n_f I_0 \left[ \cos \theta' \int_{-(\frac{\pi}{2} - \theta')}^{\frac{\pi}{2} + \theta'} \cos \theta d\theta + \sin \theta' \int_{-(\frac{\pi}{2} - \theta')}^{\frac{\pi}{2} + \theta'} \sin \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(\phi - \phi') d(\phi - \phi') \right] = I_0; \quad (1.4.13)$$

onde  $\beta = \frac{\pi}{2} - \theta'$  e  $\pi - \beta = \frac{\pi}{2} + \theta'$ . Portanto, quando  $\theta' = 0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , e integramos de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{\pi}{2}$  e, quando  $\theta' = \frac{\pi}{2}$ ,  $\beta = 0$  e integramos de  $0$  à  $\pi$ . A eq.(1.4.13) resulta em:

$$n_f I_0 [2\cos^2 \theta' + 4\sin^2 \theta'] = I_0, \quad (1.4.14)$$

e portanto:

$$n_f = \frac{1}{2(1 + \sin^2 \theta')}. \quad (1.4.15)$$

Observe que o fator de normalização depende da colatitude do Sol. Seus

valores máximo e mínimo são, respectivamente,  $1/2$  e  $1/4$ . Fisicamente, isto significa que a distribuição de temperaturas é mais uniforme para  $\theta' = \pi/2$  ( $n_f = 1/4$ ), do que para  $\theta' = 0$  ( $n_f = 1/2$ ). A intensidade da força Térmica Resultante é tanto maior quanto maior for a diferença entre as temperaturas máxima e mínima na superfície do corpo.

Quando as frequências orbital e de rotação são nulas,  $\nu_{ro} = \nu_{or} = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $X = \frac{1}{R}$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ , e a Eq.(1.4.10) se transforma em:

$$\vec{a} = \frac{-2\alpha I_0 n_f}{3\rho c R \left(1 + \frac{k}{4\epsilon\sigma R T_0^3}\right)} \left\{ \sin \theta' [\cos(\phi')\hat{i} - \sin(\phi')\hat{j}] + \cos(\theta')\hat{k} \right\}. \quad (1.4.16)$$

### 1.5 Ângulo de Atraso

A variável angular  $\delta$  definida na Eq.(1.3.27) é chamada de ângulo de atraso e representa o ângulo entre a direção de absorção da radiação e sua reemissão. A magnitude do ângulo de atraso depende de características físico-químicas do corpo tais como: condutividade térmica ( $k$ ), calor específico ( $C_p$ ), e densidade de massa ( $\rho$ ), que determinam sua inércia térmica, além de variáveis físicas importantes como: frequência angular ( $\nu$ ), raio do corpo ( $R$ ), e distância à fonte de energia radiante ( $r$ ).

Da eq.(1.3.26), temos:

$$\delta = \arctan \left( -\frac{kY}{4\epsilon\sigma T_0^3 + kX} \right); \quad (1.5.1)$$

onde  $T_0$  é a temperatura média do corpo para uma determinada distância  $r$  da fonte. Podemos escrever  $T_0$  em função de  $r$ , da seguinte forma:

$$T_0 = T_{01} \left( \frac{r_1}{r} \right)^{1/2}; \quad (1.5.2)$$

onde  $T_{01}$  é a temperatura média para  $r_1 = 1U.A.$

Para determinarmos o ângulo de atraso necessitamos conhecer  $X$  e  $Y$ . Através de uma pequena mudança de variáveis podemos escrever a eq.(1.3.24) como segue:

$$X + iY = \frac{K}{j_1(x)} \frac{dj_1(x)}{dx} \Big|_{x=KR}; \quad (1.5.3)$$

onde  $x = KR$  e

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}. \quad (1.5.4)$$

Logo:

$$X + iY = \frac{2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x}{R(\sin x - x \cos x)}; \quad (1.5.5)$$

onde:

$$x = \left( \frac{i\nu\rho C_p}{k} \right)^{1/2} R. \quad (1.5.6)$$

X e Y podem ser calculados de forma direta com o auxílio de (1.5.5) e (1.5.6), porém, com o objetivo de entendermos melhor os resultados obtidos mais adiante vamos expandir a eq.(1.5.5) em série. De (1.5.4) temos:

$$j_1(x) = \frac{2}{3!}x - \frac{4}{5!}x^3 + \frac{6}{7!}x^5 - \frac{8}{9!}x^7 + \frac{10}{11!}x^9 - \frac{12}{13!}x^{11} + \dots, \quad (1.5.7)$$

$$\frac{dj_1(x)}{dx} \Big|_{r=R} = \frac{2}{3!} - \frac{3.4}{5!}x^2 + \frac{5.6}{7!}x^4 - \frac{7.8}{9!}x^6 + \frac{9.10}{11!}x^8 - \frac{11.12}{13!}x^{10} + \dots \quad (1.5.8)$$

Da eq.(1.5.3) temos:

$$K \frac{dj_1(x)}{dx} \Big|_{r=R} = j_1(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1.5.9)$$

ou

$$\frac{1}{R} \left( \frac{2}{3!}x - \frac{3.4}{5!}x^3 + \frac{5.6}{7!}x^5 - \frac{7.8}{9!}x^7 + \dots \right) = \frac{2}{3!}a_0x + \left( \frac{2}{3!}a_2 - \frac{4}{5!}a_0 \right)x^3$$

$$+ \left( \frac{2}{3!} a_4 - \frac{4}{5!} a_2 + \frac{6}{7!} a_0 \right) x^5 + \left( \frac{2}{3!} a_6 - \frac{4}{5!} a_4 + \frac{6}{7!} a_2 - \frac{8}{9!} a_0 \right) x^7 \dots; \quad (1.5.10)$$

onde  $K = x/R$ , e

$$a_0 = \frac{1}{R},$$

$$a_2 = \left( \frac{4}{5!} a_0 - \frac{1}{R} \frac{3.4}{5!} \right) \frac{3!}{2},$$

$$a_4 = \left( \frac{4}{5!} a_2 - \frac{6}{7!} a_0 + \frac{1}{R} \frac{5.5}{7!} \right) \frac{3!}{2},$$

$$a_6 = \left( \frac{4}{5!} a_4 - \frac{6}{7!} a_2 + \frac{8}{9!} a_0 - \frac{1}{R} \frac{7.8}{9!} \right) \frac{3!}{2},$$

etc., e  $a_n = 0$  para  $n$  ímpar. Temos então:

$$X + iY = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots + a_n x^n + \dots; \quad (1.5.11)$$

onde  $n = 0, 2, 4, 6, \dots$

Substituindo  $n = 0, 2, 4, 6, \dots$  por  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  na eq.(1.5.11) obtemos:

$$X + iY = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \dots; \quad (1.5.12)$$

onde, a fórmula de recorrência para  $a_m$  é:

$$a_m = \left[ \left( \sum_{l=1}^{l=m} (-1)^{2m-l-1} \frac{(2l+2)}{(2l+3)!} a_{m-l} \right) + (-1)^m \frac{(2m+1)(2m+2)}{R(2m+3)!} \right] \frac{3!}{2}. \quad (1.5.13)$$

Usando a eq.(1.5.6) em (1.5.12) obtemos:

$$X = \frac{1}{R} + \nu^2 R^3 k_2 - \nu^4 R^7 k_4 + \nu^6 R^{11} k_6 - \nu^8 R^{15} k_8 + \dots, \quad (1.5.14)$$

$$Y = -\nu R k_1 + \nu^3 R^5 k_3 - \nu^5 R^9 k_5 + \nu^7 R^{13} k_7 - \nu^9 R^{17} k_9 + \dots; \quad (1.5.15)$$

onde  $\nu$  é a frequência angular,  $R$  o raio do corpo, e  $k_n = \left(\frac{\rho C_p}{k}\right)^n b_n$ .

A seguir, alguns valores da constante  $b_n$  que independe das características do corpo em questão:

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = -0.2$$

$$b_2 = -0.005714$$

$$b_3 = -0.0002539$$

$$b_4 = -0.00001220$$

*etc...*

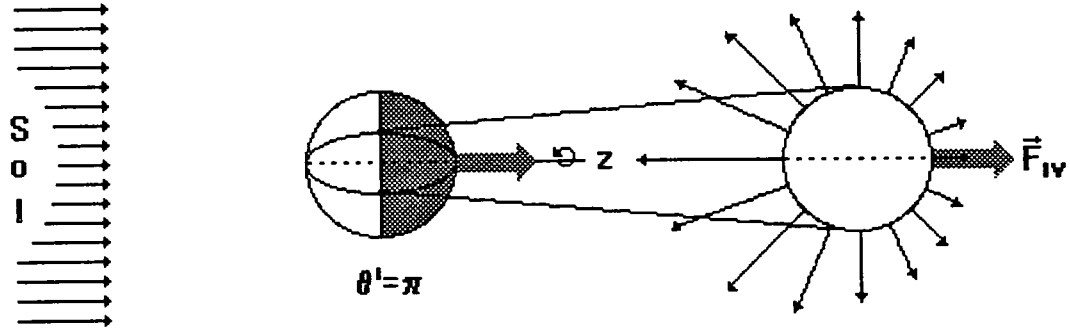


Figura 1.4 - Força Inverno-Verão

### 1.6 Efeito Inverno-Verão sem Ângulo de Atraso

Quando o eixo de rotação do corpo está orientado ao longo do plano orbital do corpo, paralelo à direção de incidência da radiação térmica, temos  $\theta' = 0$  (ou  $\theta' = \pi$ ) e  $\sin \theta' = 0$  (portanto, não há efeito Noite-Dia). A força de reemissão térmica é devida, unicamente, ao efeito Inverno-Verão. Para  $\theta' = 0$ , por exemplo, a eq.(1.3.38) resume-se a:

$$\Delta I(\theta) = n_f I_0 \cos \theta; \quad (1.6.1)$$

onde  $n_f$  é o fator de normalização. Integramos  $\Delta I$  como segue:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} n_f I_0 \cos \theta d\theta = I_0, \quad (1.6.2)$$

e, obtemos  $n_f = \frac{1}{2}$  e  $\Delta I_{max} = \frac{I_0}{2}$ .



Observe que a colatitude  $\theta' = 0$  corresponde ao polo norte do corpo. Comparando esta equação com a eq.(1.3.32) temos  $f_{1,0} = \frac{1}{2}$  e  $f_{1,1} = \frac{1}{2} \sin \theta' = 0$  e  $\nu t = 0$ . Das eqs. (1.5.14), (1.5.15) e (1.5.1) obtemos  $X = 1/R$ ,  $Y = 0$  e  $\delta = 0$ . Desta forma, a equação para a aceleração é dada por:

$$\vec{a} = \frac{-\alpha I_0 \hat{k}}{3\rho R \left(1 + \frac{k}{4\epsilon\sigma R T_0^3}\right)}, \quad (1.6.3)$$

que está de acordo com Afonso et al.(1989). Este resultado em particular pode também ser obtido resolvendo a equação de calor de Laplace, independente do tempo. A Fig.(1.4) mostra como a assimetria na perda de momento encontra-se distribuída ao longo do eixo de rotação z, originando a força Inverno- Verão.

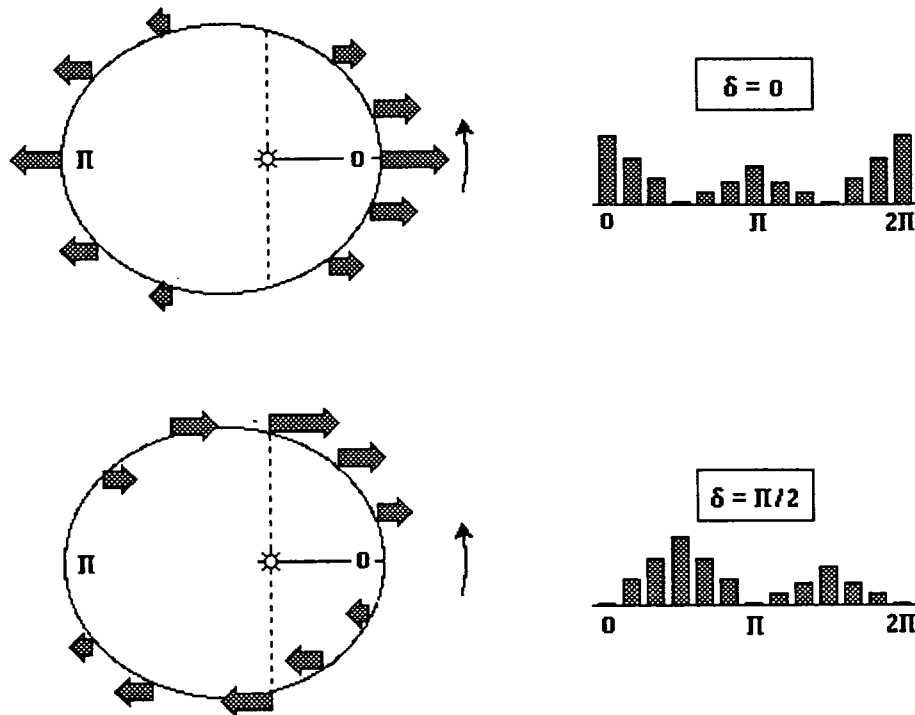


Figura 1.5 - Ângulo de Atraso e a Força Inverno- Verão

### 1.7 Efeito Inverno-Verão com Ângulo de Atraso

Considerar o ângulo de atraso, para o efeito Inverno-Verão, significa considerar a inércia térmica e o movimento orbital do corpo. A frequência fundamental que determina o ângulo de atraso, neste caso, é a frequência orbital. De (1.4.8) e (1.4.13), temos:

$$\vec{a} = n_f B_2 \cos(\theta' - \delta_2) \hat{k}; \quad (1.7.1)$$

onde:

$$n_f = \frac{1}{2(1 + \sin^2 \theta')},$$

$$B_2 = \frac{-2\alpha I_0}{3\rho c R \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

E, portanto

$$\vec{a} = \frac{1}{(1 + \sin^2 \theta')} \left[ \frac{-\alpha I_0 \cos(\theta' - \delta_2)}{3\rho c R \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \hat{k}. \quad (1.7.2)$$

O fator de normalização  $n_f$  é função de  $\theta'$ , a colatitude do Sol. É igual a 1/2 para  $\theta' = 0$  (somente efeito Inverno-Verão), 1/4 para  $\theta = \pi/2$  (somente efeito Noite-Dia), e possui valores intermediários para  $\theta' = \text{arbitrario}$  uma vez que, neste caso, os dois efeitos coexistem. Observe que  $\Delta I_{max}$  é igual a  $I_0/4$  para o efeito Noite-Dia, e  $I_0/2$  para o efeito Inverno-Verão, pois a diferença entre temperaturas máxima e mínima é maior para o efeito Inverno-Verão do que para o efeito Noite-Dia. Isto significa que a força de reemissão térmica, também, deverá ser maior.

Observe na Fig.(1.5) como o ângulo de atraso desloca os pontos de máximo e mínimo para a força Inverno-Verão.

### 1.8 Eixo de Rotação no Plano Orbital

Quando o eixo de rotação (eixo z) encontra-se no plano orbital,  $\nu t = nt$ ; onde  $n$  é o movimento médio do corpo. A eq.(1.7.2) transforma-se em:

$$\vec{a} = \frac{1}{(1 + \sin^2 nt)} \left[ \frac{-\alpha I_0 \cos(nt - \delta_2)}{3\rho c R \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \hat{k}. \quad (1.8.1)$$

No sistema de referencia (R,S,W) temos:

$$\hat{k} = -\cos nt \hat{r} + \sin nt \hat{s}; \quad (1.8.2)$$

onde,  $\hat{w} = 0$ , uma vez que o eixo de rotação está no plano. A aceleração pode ser colocada na seguinte forma:

$$\vec{a} = R\hat{r} + S\hat{s}; \quad (1.8.3)$$

onde:

$$R = \vec{a} \cdot \hat{r} = a \hat{k} \cdot \hat{r} \quad e \quad S = \vec{a} \cdot \hat{s} = a \hat{k} \cdot \hat{s} \quad (1.8.4)$$

ou

$$R = -a \cos nt \quad e \quad S = a \sin nt. \quad (1.8.5)$$

O módulo da aceleração  $\vec{a}$  é dado por:

$$a = \frac{C \cos(nt - \delta_2)}{(1 + \sin^2 nt)}; \quad (1.8.6)$$

onde:

$$C = \frac{-\alpha I_0}{3\rho c R \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.8.7)$$

Logo, as componentes transversal e radial da aceleração podem ser expressas da seguinte forma:

$$S = \frac{C \cos(nt - \delta_2)}{(1 + \sin^2 nt)} \sin nt, \quad (1.8.8)$$

$$R = \frac{-C \cos(nt - \delta_2)}{(1 + \sin^2 nt)} \cos nt. \quad (1.8.9)$$

Calculando a média de R e S para uma revolução temos:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S d(nt), \quad (1.8.10)$$

ou seja,

$$\langle S \rangle = \frac{C}{2\pi} \left[ \underbrace{\cos \delta_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos nt \sin nt}{(1 + \sin^2 nt)} d(nt)}_{=0} + \sin \delta_2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 nt}{(1 + \sin^2 nt)} d(nt) \right],$$

$$\langle S \rangle = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) C \sin \delta_2. \quad (1.8.11)$$

Repetindo o procedimento para a componente R, obtemos:

$$\langle R \rangle = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - C \cos \delta_2; \quad (1.8.12)$$

portanto, R e S médios são dados por:

$$\langle R \rangle = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{\alpha I_0 \cos(\delta_2)}{3\rho c R \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.8.13)$$

$$\langle S \rangle = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{-\alpha I_0 \sin(\delta_2)}{3\rho c R \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.8.14)$$

Temos, então,  $n_f = 1.70$  para a componente radial e  $n_f = 0.30$  para a componente transversal. Isto ocorre, porque, durante um período orbital  $\vec{R}$  é sempre positiva, enquanto que  $\vec{S}$  não. Como, o fator de normalização utilizado, atualmente, em cálculos que envolvam o efeito Inverno-Verão, é igual à 1/4, ou seja,  $n_f = 0.25$  encontramos uma diferença de, aproximadamente, 600% para R e 15% para S.

Vamos, agora, repetir os procedimentos do item anterior com o objetivo de obtermos R e S para  $n_f = 1/4$ . Se supormos que a distribuição de temperaturas para  $\theta' = \text{arbitrario}$  é idêntica ao caso em que  $\theta' = \pi/2$  teremos  $n_f = 1/4$ . A eq.(1.4.9) transforma-se em:

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = \frac{I_0}{4} \cos \theta \cos \theta'. \quad (1.8.15)$$

Como o eixo de rotação encontra-se no plano orbital,  $\nu t = nt$ , e podemos escrever

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = \frac{I_0}{4} \cos \theta \cos nt. \quad (1.8.16)$$

Comparando esta equação com a eq. (1.3.32), temos  $f_{1,1} = 0$ ,  $f_{1,0} = 1/4$  e  $\nu = n$ . E a eq. (1.4.8) resulta em:

$$\vec{a} = \frac{-\alpha I_0 \cos(nt - \delta_2) \hat{k}}{6\rho c R \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.8.17)$$

As componentes R e S médias para uma revolução são:

$$\langle R \rangle = \frac{\alpha I_0 \cos(\delta)}{12\rho c R \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.8.18)$$

$$\langle S \rangle = \frac{-\alpha I_0 \sin(\delta)}{12\rho c R \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.8.19)$$

O efeito Inverno-Verão é inversamente proporcional ao quadrado da distância do corpo à fonte de energia radiante. Podemos colocar esta relação em evidência, por exemplo, para um corpo-teste com as seguintes características:  $\rho = 2500 \text{ kgm}^{-3}$ ;  $\alpha = \epsilon = 1.0$ ;  $k = 1.5 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ;  $C_p = 10^3 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ ;  $R = 0.5\text{m}$ . Obtemos:

$$\langle R \rangle = C_r \frac{1}{r^2} \quad e \quad \langle S \rangle = C_s \frac{1}{r^2} \quad (1.8.20)$$

Que resulta em:

$$\vec{a} = C_r \frac{1}{r^2} \hat{r} + C_s \frac{1}{r^2} \hat{s}; \quad (1.8.21)$$

onde:  $C_r = +2.06398 \times 10^{-6} \text{ U.A.}^3 \text{ ano}^{-2}$ , e  $C_s = -1.30460 \times 10^{-8} \text{ U.A.}^3 \text{ ano}^{-2}$ .

Como ( $m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ ) podemos escrever a componente transversal da seguinte forma:

$$\langle S \rangle = \frac{-\pi\alpha R^2 I_r \sin(\delta)}{9mc \left(1 + \frac{kX_2}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.8.22)$$

Este resultado possui uma forma similar ao obtido por Rubincam(1987).

### 1.8.1 A Força Inverno-Verão e as Equações de Gauss

Com o auxílio das equações de Gauss, podemos obter uma expressão analítica para a variação dos elementos osculadores de um corpo devido a uma força de perturbação. As equações de Gauss para o semi-eixo maior e a excentricidade são:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}} [Re \sin f + S(1 + e \cos f)], \quad (1.8.1.1)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na} [R \sin f + S(\cos f + \cos E)]. \quad (1.8.1.2)$$

A média de (1.8.1.1) e (1.8.1.2) para uma revolução é dada por:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \frac{2}{n(1-e^2)^{1/2}} [\langle R \sin f \rangle + \langle S(1 + e \cos f) \rangle], \quad (1.8.1.3)$$

e

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na} [\langle R \sin f \rangle + \langle S(\cos f + \cos E) \rangle], \quad (1.8.1.4)$$

respectivamente. Sendo que, a média de uma função  $M$  para um período orbital é dada por:

$$\langle M \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T M dt$$

$$\langle M \rangle = \frac{n}{2\pi H} \int_0^{2\pi} r^2 M df$$

onde,  $H = na^2(1-e^2)^{1/2}$  é o momento angular. Logo, temos:

$$\langle M \rangle = \frac{1}{2\pi a^2(1-e^2)^{1/2}} \int_0^{2\pi} r^2 M df \quad (1.8.1.5)$$

De (1.8.8) e (1.8.9) temos:

$$R = -C \left[ \frac{\cos \delta_2 \cos^2 f + \sin \delta_2 \cos f \sin f}{(1 + \sin^2)} \right]$$

$$S = C \left[ \frac{\sin \delta_2 \sin^2 f + \cos \delta_2 \cos f \sin f}{(1 + \sin^2)} \right]$$

onde  $C = \frac{C_0}{r^2}$ , e  $C_0$  é uma constante. Podemos então, calcular a média de cada termo na eq.(1.8.1.1). Para o primeiro termo, temos

$$\begin{aligned} \langle R \sin f \rangle &= \frac{-C_0}{2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2}} \left[ \cos \delta_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 f \sin f}{(1 + \sin^2 f)} df \right. \\ &\quad \left. + \sin \delta_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos f \sin^2 f}{(1 + \sin^2 f)} df \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.8.1.7)$$

e, para o segundo

$$\langle S(1 + e \cos f) \rangle = \langle S \rangle + e \langle S \cos f \rangle$$

temos

$$\langle S \rangle = \frac{C_0}{2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2}} \left[ \sin \delta_2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 f}{(1 + \sin^2 f)} df \right] \quad (1.8.1.8)$$

$$\begin{aligned} \langle S \cos f \rangle &= \frac{C_0}{2\pi a^2 (1 - e^2)^{1/2}} \left[ \cos \delta_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 f \sin f}{(1 + \sin^2 f)} df \right. \\ &\quad \left. + \sin \delta_2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 f \cos f}{(1 + \sin^2 f)} df \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.8.1.9)$$

Portanto,

$$\langle S(1 + e \cos f) \rangle = \langle S \rangle = \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{C_0 \sin \delta_2}{4a^2 (1 - e^2)^{1/2}} \quad (1.8.1.10)$$

Para a eq.(1.8.1.2) temos:



$$\langle S(\cos f + \cos E) \rangle = \langle S \cos f \rangle + \langle S \cos E \rangle;$$

onde  $\langle S \cos f \rangle = 0$  e  $\cos E = \frac{a-r}{ae}$ , e portanto,

$$\langle S(\cos f + \cos E) \rangle = \frac{1}{e} \langle S \rangle - \frac{1}{ae} \langle rS \rangle$$

onde  $\langle S \rangle$  é dada pela eq.(1.8.1.8), e

$$\langle rS \rangle = \frac{-C_0(1-e^2)^{1/2}}{2\pi a} \left( \sin \delta_2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 f}{(1 + \sin^2 f)(1 + e \cos f)} df \right) \quad (1.8.1.11)$$

Usando (1.8.1.8) e (1.8.1.11) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle S(\cos f + \cos E) \rangle = & \frac{C_0 \sin \delta_2}{2\pi a^2 e (1-e^2)^{1/2}} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 f}{(1 + \sin^2 f)} df \right. \\ & \left. - (1-e^2) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 f}{(1 + \sin^2 f)(1 + e \cos f)} df \right]; \end{aligned} \quad (1.8.1.12)$$

onde, utilizamos  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f}$ . Expandindo  $(1 + e \cos f)^{-1}$  em série

$$(1 + e \cos f)^{-1} = 1 - e \cos f + e^2 \cos^2 f - e^3 \cos^3 f + e^4 \cos^4 f - \dots$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle S(\cos f + \cos E) \rangle = & \frac{C_0 \sin \delta_2}{2\pi a^2 (1-e^2)^{1/2}} \left[ e \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 f}{(1 + \sin^2 f)} df + e^3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 f \cos^2 f}{(1 + \sin^2 f)} df \right. \\ & \left. + e^5 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 f \cos^4 f}{(1 + \sin^2 f)} df + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.8.1.13)$$

Substituindo as Eqs.(1.8.1.7) e (1.8.1.10) em (1.8.1.1), e as Eqs.(1.8.1.7) e (1.8.1.13) em (1.8.1.2) obtemos:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{C_0 \sin \delta_2}{4\pi a^{1/2}(1-e^2)}, \quad (1.8.1.14)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{C_0 \sin \delta_2}{4\pi a^{3/2}} \left[ e \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 f}{(1 + \sin^2 f)} df + e^3 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 f \cos^2 f}{(1 + \sin^2 f)} df + \dots \right]. \quad (1.8.1.15)$$

Para pequenas excentricidades as eqs.(1.8.1.14) e (1.8.1.15) se transformam em:

$$\left\langle \frac{da}{dt} \right\rangle = \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{C_0 \sin \delta_2}{4\pi a^{1/2}}, \quad (1.8.1.16)$$

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = \frac{e C_0 \sin \delta_2}{4\pi(1 + \sqrt{2})a^{3/2}}. \quad (1.8.1.17)$$

Integrando as equações acima, otemos finalmente:

$$a = a_0 \left[ 1 + \left( \frac{3\sqrt{2}}{16} \right) \frac{C_s}{\pi a_0^{3/2}} (t - t_0) \right]^{2/3}, \quad (1.8.1.18)$$

$$e = e_0 \exp \left[ \frac{C_s}{4\pi a_0^{3/2}} (t - t_0) \right]. \quad (1.8.1.19)$$

onde,  $C_s = \frac{C_0 \sin \delta_2}{(1+\sqrt{2})}$ . Observe que  $C_s$  é negativo, e portanto, o efeito é dissipativo. Podemos concluir, portanto, que o semi-eixo maior e a excentricidade irão decrescer ao longo do tempo.

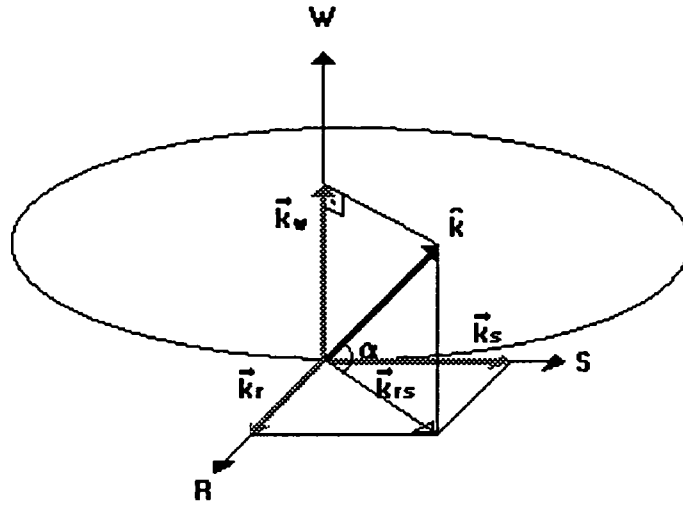


Figura 1.6 - Componentes R, S, e W do Vetor Unitário  $\hat{k}$

### 1.9 Eixo de Rotação com Orientação Arbitrária

Vamos agora, obter as componentes R, S, e W da aceleração Inverno- Verão, para o caso geral em que o eixo de rotação não se encontra necessariamente, no plano orbital.

Nessas condições podemos escrever a eq.(1.7.2) da seguinte forma:

$$\vec{a} = \frac{C}{(1 + \sin^2 \theta')} \cos(\theta' - \delta_2) \hat{k} \quad (1.9.1)$$

O vetor unitário  $\hat{k}$  pode ser decomposto em duas componentes:  $\vec{k}_{rs}$  e  $\vec{k}_w$ . Conforme a Fig.(1.6) temos:

$$\vec{k}_{rs} = [\cos \alpha] \hat{r}_s, \quad (1.9.2)$$

$$\vec{k}_w = [\sin \alpha] \hat{w}; \quad (1.9.3)$$

onde:  $\hat{r}s = -\cos nt\hat{r} + \sin nt\hat{s}$ . E, como  $\hat{k} = \vec{k}_{r_s} + \vec{k}_w$ , temos:

$$\hat{k} = \cos \alpha [-\cos nt\hat{r} + \sin nt\hat{s}] + [\sin \alpha] \hat{w}. \quad (1.9.4)$$

Logo, as componentes R, S e W de  $\vec{a}$  são dadas por:

$$R = \frac{-C}{(1 + \sin^2 \theta')} \cos(\theta' - \delta_2) \cos \alpha \cos nt, \quad (1.9.5)$$

$$S = \frac{C}{(1 + \sin^2 \theta')} \cos(\theta' - \delta_2) \cos \alpha \sin nt, \quad (1.9.6)$$

$$W = \frac{C}{(1 + \sin^2 \theta')} \cos(\theta' - \delta_2) \sin \alpha. \quad (1.9.7)$$

### 1.9.1 Aceleração Transversal S

Desejamos uma expressão geral para  $\langle S \rangle$  em elementos osculadores, quando o eixo de rotação não está no plano da órbita. O vetor posição unitário  $\hat{r}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{r} = & [\cos \Omega \cos(\omega + f) - \cos I \sin \Omega \sin(\omega + f)] \hat{x} + [\sin \Omega \cos(\omega + f) \\ & + \cos I \cos \Omega \sin(\omega + f)] \hat{y} + [\sin I \sin(\omega + f)] \hat{z}; \end{aligned} \quad (1.9.1.1)$$

onde:

- $I$  - Inclinação da órbita ao equador da Terra,
- $\Omega$  - Posição nodal do plano equatorial,
- $\omega$  - Argumento do perigeu,
- $f$  - Anomalia verdadeira.

O vetor unitário  $\hat{s}$  perpendicular ao raio vetor é dado por:

$$\begin{aligned}\hat{s} = & [-\cos \Omega \sin(\omega + f) - \cos I \sin \Omega \cos(\omega + f)] \hat{x} + [-\sin \Omega \sin(\omega + f) \\ & + \cos I \cos \Omega \cos(\omega + f)] \hat{y} + [\sin I \cos(\omega + f)] \hat{z},\end{aligned}\quad (1.9.1.2)$$

e, o vetor unitário  $\hat{w}$  que completa o sistema RSW é dado por:

$$\hat{w} = [\sin I \sin(\omega + f)] \hat{x} + [-\sin I \cos \Omega] \hat{y} + [\cos I] \hat{z}.\quad (1.9.1.3)$$

O vetor unitário na direção do spin pode ser representado por:

$$\hat{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z};\quad (1.9.1.4)$$

onde:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1.\quad (1.9.1.5)$$

O vetor aceleração está direcionado ao longo do eixo  $\hat{k}$  e, é proporcional a  $\cos \Psi$ , isto é,

$$\vec{a} \propto \cos \Psi \hat{k},\quad (1.9.1.6)$$

onde:

$$\cos \Psi = \hat{r} \cdot \hat{k},\quad (1.9.1.7)$$

$$\hat{r} \cdot \hat{k} = -\cos \theta'.$$

A aceleração  $S$  perpendicular ao raio vetor é então obtida de  $\vec{a}$  via

$$S = \vec{a} \cdot \hat{s}.\quad (1.9.1.8)$$

Usando (1.9.1.1) e as equações seguintes, vamos obter a média para S fazendo  $(\omega + f)$  variar de 0 a  $2\pi$ . Como

$$\vec{a} = C \cos \Psi \hat{k}, \quad (1.9.1.9)$$

temos:

$$S = C [(\hat{r} \cdot \hat{k}) \hat{k}] \cdot \hat{s}, \quad (1.9.1.10)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} = C \left\{ \left[ \left( \cos \Omega \cos(\omega + f) - \cos I \sin \Omega \sin(\omega + f) \right) \hat{x} + \left( \sin \Omega \cos(\omega + f) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \cos I \cos \Omega \sin(\omega + f) \right) \hat{y} + \left( \sin I \sin(\omega + f) \right) \hat{z} \right] \cdot \left[ k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \right] \right\} \hat{k}. \end{aligned} \quad (1.9.1.11)$$

E portanto,

$$\begin{aligned} S = C \left\{ \left[ \cos \Omega \cos(\omega + f) - \cos I \sin \Omega \sin(\omega + f) \right] k_x \right. \\ \left. + \left[ \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos I \cos \Omega \sin(\omega + f) \right] k_y + \left[ \sin I \sin(\omega + f) \right] k_z \right\} \\ \times \left( k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \right) \cdot \left\{ \left[ -\cos \Omega \sin(\omega + f) - \cos I \sin \Omega \cos(\omega + f) \right] \hat{x} \right. \\ \left. + \left[ -\sin \Omega \sin(\omega + f) + \cos I \cos \Omega \cos(\omega + f) \right] \hat{y} + \left[ \sin I \cos(\omega + f) \right] \hat{z} \right\}. \end{aligned} \quad (1.9.1.12)$$

Fazendo a média sobre  $(\omega + f)$  de 0 a  $2\pi$ , temos:

$$\langle S \rangle = 0. \quad (1.9.1.13)$$

Vamos repetir o procedimento anterior, agora porém, levando em consideração o ângulo de atraso substituindo na eq.(1.9.1.11)  $\omega + f$  por  $\omega + f - \delta$ . Aqui,  $\hat{r} = \hat{r}_\alpha$  é o vetor posição unitário atrasado compatível com o arraste térmico. Neste caso, temos:

$$\vec{a} = C(\hat{r}_\alpha \cdot \hat{k})\hat{k}; \quad (1.9.1.14)$$

onde  $\hat{r}_\alpha \cdot \hat{k} = -\cos(\theta' - \delta_2)$ . O que resulta em:

$$S = C[(\hat{r}_\alpha \cdot \hat{k})\hat{k}] \cdot \hat{s}, \quad (1.9.1.15)$$

$$\begin{aligned} S = C \Big\{ & \left[ \cos \Omega \cos(\omega + f - \delta) - \cos I \sin \Omega \sin(\omega + f - \delta) \right] k_x + \left[ \sin \Omega \cos(\omega + f - \delta) \right. \\ & \left. + \cos I \cos \Omega \sin(\omega + f - \delta) \right] k_y + \left[ \sin I \sin(\omega + f - \delta) \right] k_z \Big\} \\ & \times \left( k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \right) \cdot \left\{ \left[ -\cos \Omega \sin(\omega + f) - \cos I \sin \Omega \cos(\omega + f) \right] \hat{x} \right. \\ & \left. + \left[ -\sin \Omega \sin(\omega + f) + \cos I \cos \Omega \cos(\omega + f) \right] \hat{y} + \left[ \sin I \cos(\omega + f) \right] \hat{z} \right\}. \end{aligned} \quad (1.9.1.16)$$

Fazendo a média, como anteriormente, obtemos finalmente,

$$\begin{aligned} \langle S \rangle = \langle S \rangle_{max} \Big[ & 1 - k_z^2 + \frac{1}{2}(3k_z^2 - 1) \sin^2 I + k_z \sin 2I(k_z \cos \Omega - k_x \sin \Omega) \\ & + \frac{1}{2}(k_x^2 - k_y^2) \sin^2 I \cos 2\Omega + k_x k_y \sin^2 I \sin 2\Omega \Big]. \end{aligned} \quad (1.9.1.17)$$

## CAPÍTULO 2

### ANÁLISE DOS PARÂMETROS FÍSICOS

#### 2.1 Acelerações Radial e Transversal versus Distância à Fonte

Para um corpo qualquer,  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  podem ser expressas em função da distância à fonte e do ângulo de atraso  $\delta_2$ . O ângulo de atraso devido ao movimento orbital do corpo, também, é função da distância à fonte, e portanto,  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$  transformam-se numa função simples da distância à fonte de energia radiante e dos parâmetros do corpo.

Em geral, a frequência orbital de um corpo que orbita o Sol é pequena se comparada a sua frequência de rotação; logo o ângulo de atraso  $\delta_2$  será muito pequeno (aproximadamente  $10^{-1}$  graus para nosso corpo-teste) e portanto,  $\langle R \rangle$  será maior em módulo do que  $\langle S \rangle$  uma vez que,  $\langle R \rangle$  é função de  $\cos \delta_2$  e  $\langle S \rangle$  de  $\sin \delta_2$ . A diferença em módulo entre R e S médios sofre uma atenuação, e a distância entre as duas curvas diminui, como mostra a Fig.(2.1), à medida que o corpo se aproxima do Sol. Este comportamento das curvas R e S encontra justificativa na dependência da aceleração em relação ao ângulo de atraso. Observe na Fig.(2.2) o comportamento do ângulo de atraso em função da distância à fonte de radiação.

#### 2.2 Acelerações Radial e Transversal versus Raio do Corpo

A direção do vetor aceleração varia quando consideramos corpos de diferentes tamanhos. A dependência da aceleração Inverno-Verão em relação ao raio do corpo não é simples, porém, certos aspectos da Fig.(2.3) podem ser entendidos se analisarmos o comportamento do ângulo de atraso em função do raio do corpo. À medida que o raio do



corpo diminui  $|\langle S \rangle|$  perde *peso* enquanto  $|\langle R \rangle|$  ganha, ou seja, a força tende a orientar-se na direção radial, como mostra a Fig.(2.3). Isto ocorre, devido ao comportamento de  $\delta_2$  para raios decrescentes, veja as Figs.(2.4) e (2.5).

Na Fig.(2.6) analisamos a dependência do módulo de  $\langle S \rangle$  com o raio do corpo, para três distâncias diferentes. Observe que existe uma região de máximo para  $|\langle S \rangle|$ . Esta região se desloca para a esquerda, à medida que nos aproximamos do Sol: à 2.8 U.A. temos um máximo para corpos com raio  $r = 8m$ ; à 1.0 U.A. para  $r = 4m$ ; e à 0.5 U.A. para  $r = 2m$ . A seguir, na Fig.(2.7) repetimos a análise para o módulo de  $\langle R \rangle$ . Observe que,  $|\langle R \rangle|$  cresce de forma regular, e não apresenta as regiões de máximo, que caracterizam a componente  $|\langle S \rangle|$ . A explicação na existência, ou não, das regiões de máximo para R e S médios está associada ao comportamento do ângulo de atraso e a existência de uma dependência em relação as variáveis X e Y, apresentadas nas eqs.(1.5.14) e (1.5.15), respectivamente.

### 2.3 Ângulo de Atraso versus Distância à Fonte

Uma vez que, o ângulo de atraso influi de forma significativa no comportamento da aceleração Inverno-Verão, torna-se interessante uma análise mais detalhada do mesmo. O ângulo de atraso é função da distância à fonte e portanto, possui valores que variam a medida que o corpo se aproxima ou afasta do Sol. Além disso, quando consideramos corpos com constituição semelhante, porém com tamanhos diferentes, observamos alterações no comportamento da curva para o ângulo de atraso. Da eq.(1.5.1) vemos que:

$$\delta_2 \propto \underbrace{\frac{1}{\sqrt{T_0^3}}}_A \underbrace{\frac{Y}{X}}_B ; \quad (2.3.1)$$

sendo que, a forma característica da curva apresentada em (2.2) é dada pelo termo B da eq.(2.3.1), que é a razão entre a parte imaginária Y e a parte real X da expressão dada pela eq.(1.3.24), veja as Figs.(2.8) e (2.9). A seguir, a Fig.(2.10) mostra a variação no ângulo de atraso como função da distância à fonte, e do raio do corpo (raio = 2, 5, 10, e 20 metros).

MÓDULO DAS ACELERAÇÕES MÉDIAS  $\langle R \rangle$  e  $\langle S \rangle$ 

Raio do corpo = 0.5 m

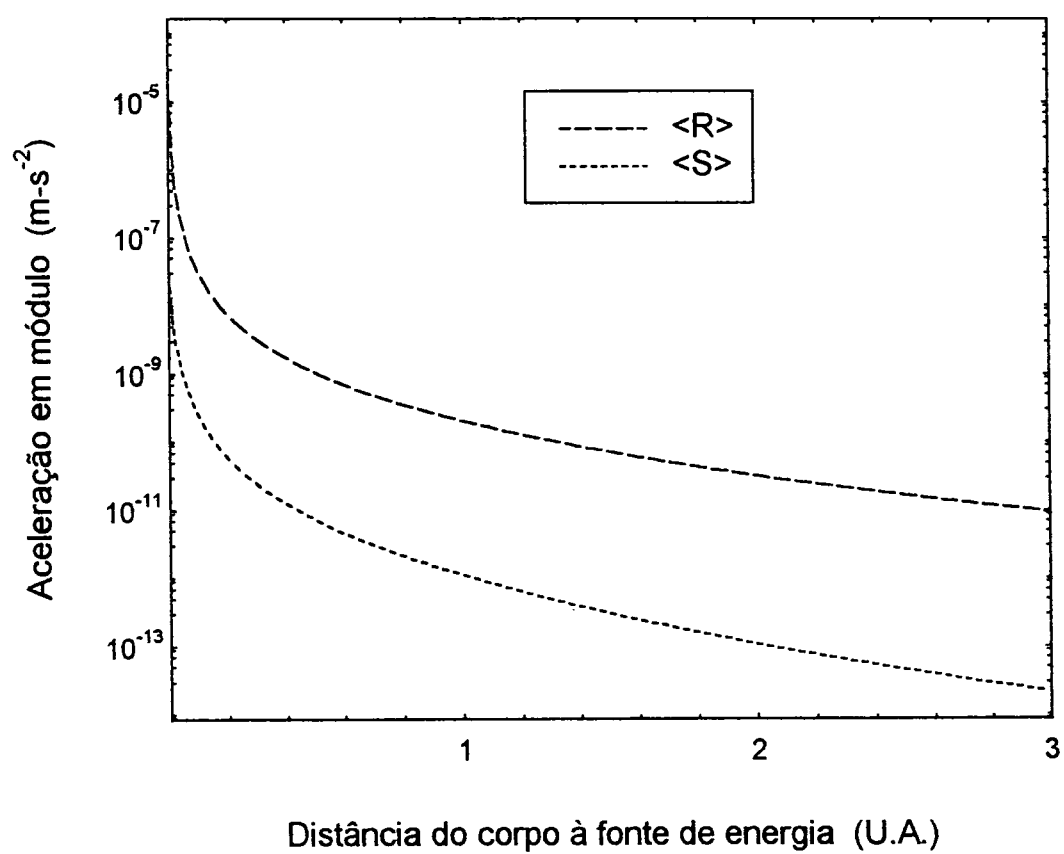


Figura 2.1

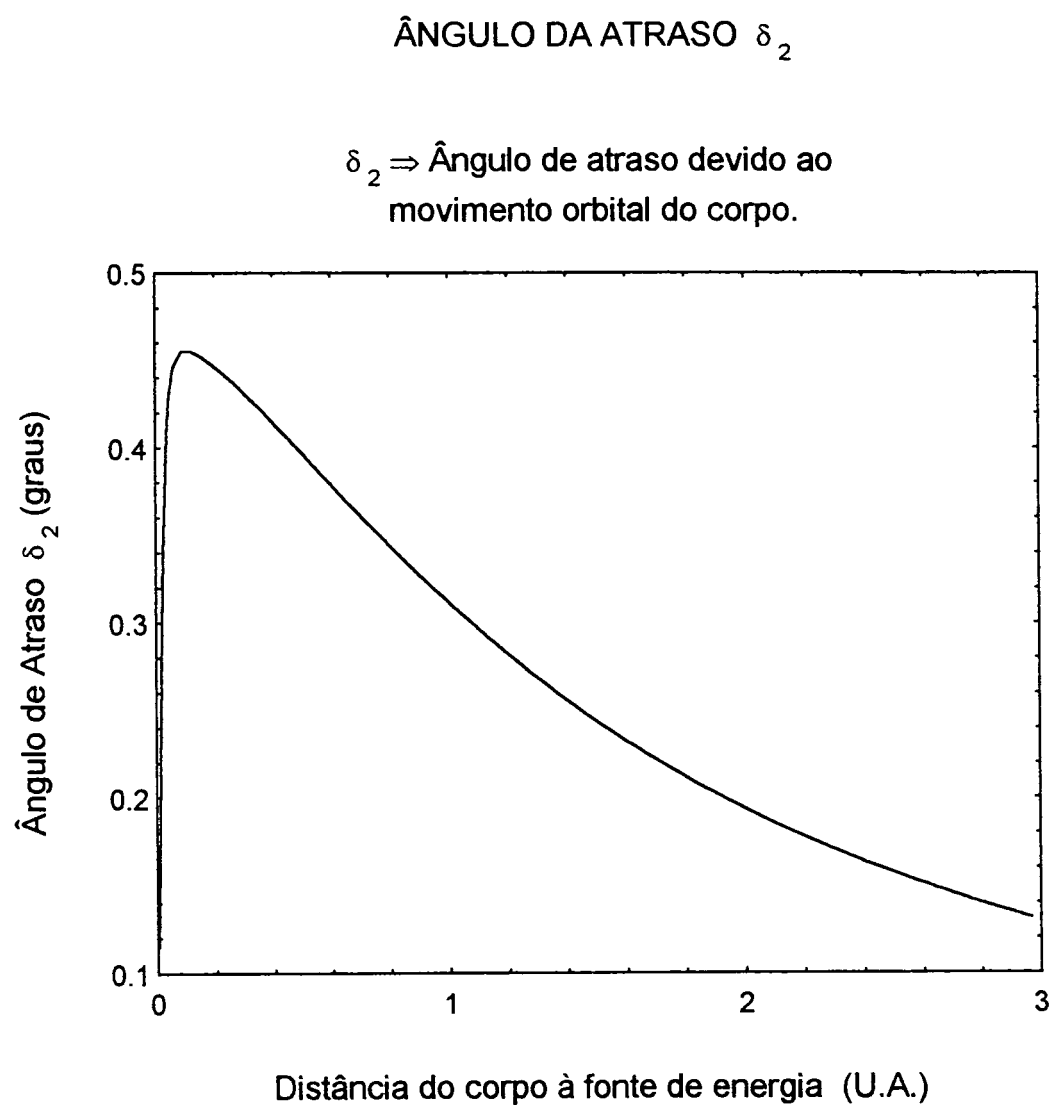
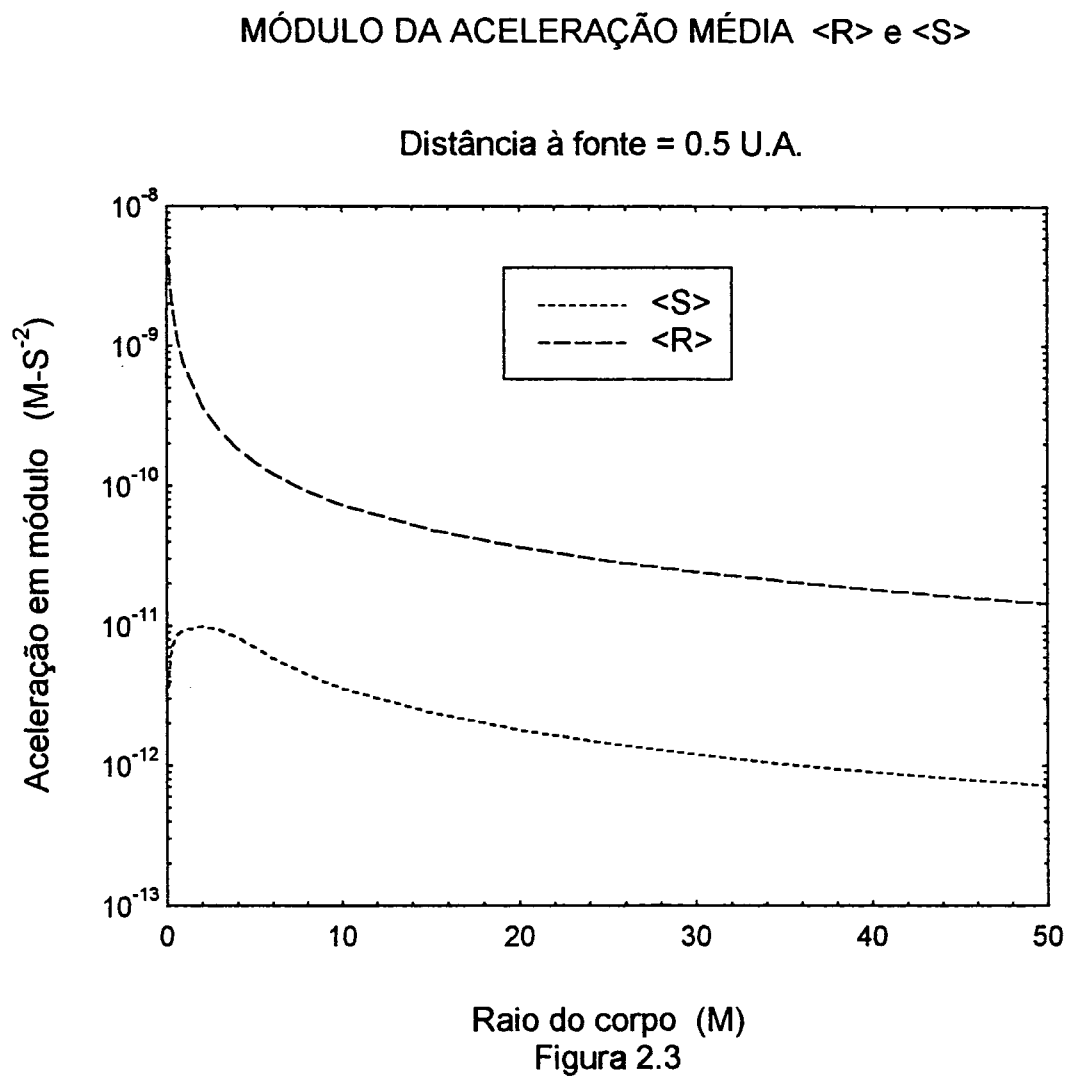


Figura 2.2

Raio do Corpo = 0.5 m



ÂNGULO DE ATRASO  $\delta_2$ 

Distâncias consideradas:

0.5 U.A.

1.0 U.A.

2.8 U.A.

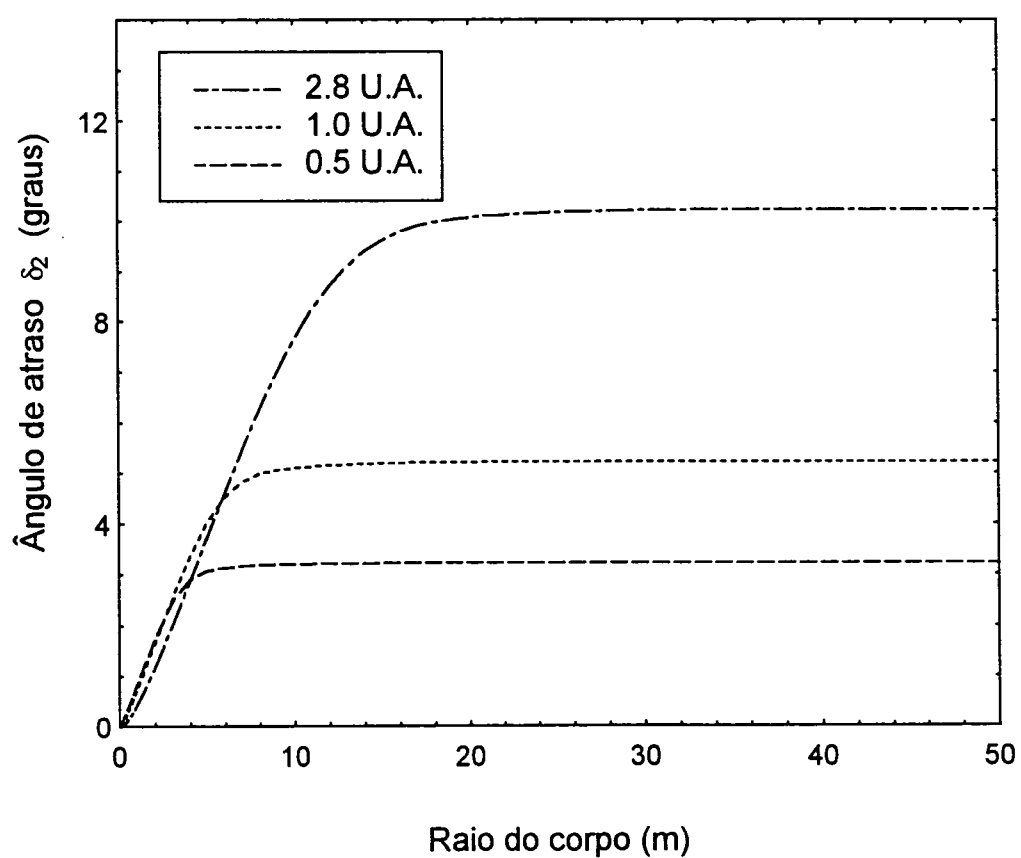


Figura 2.4

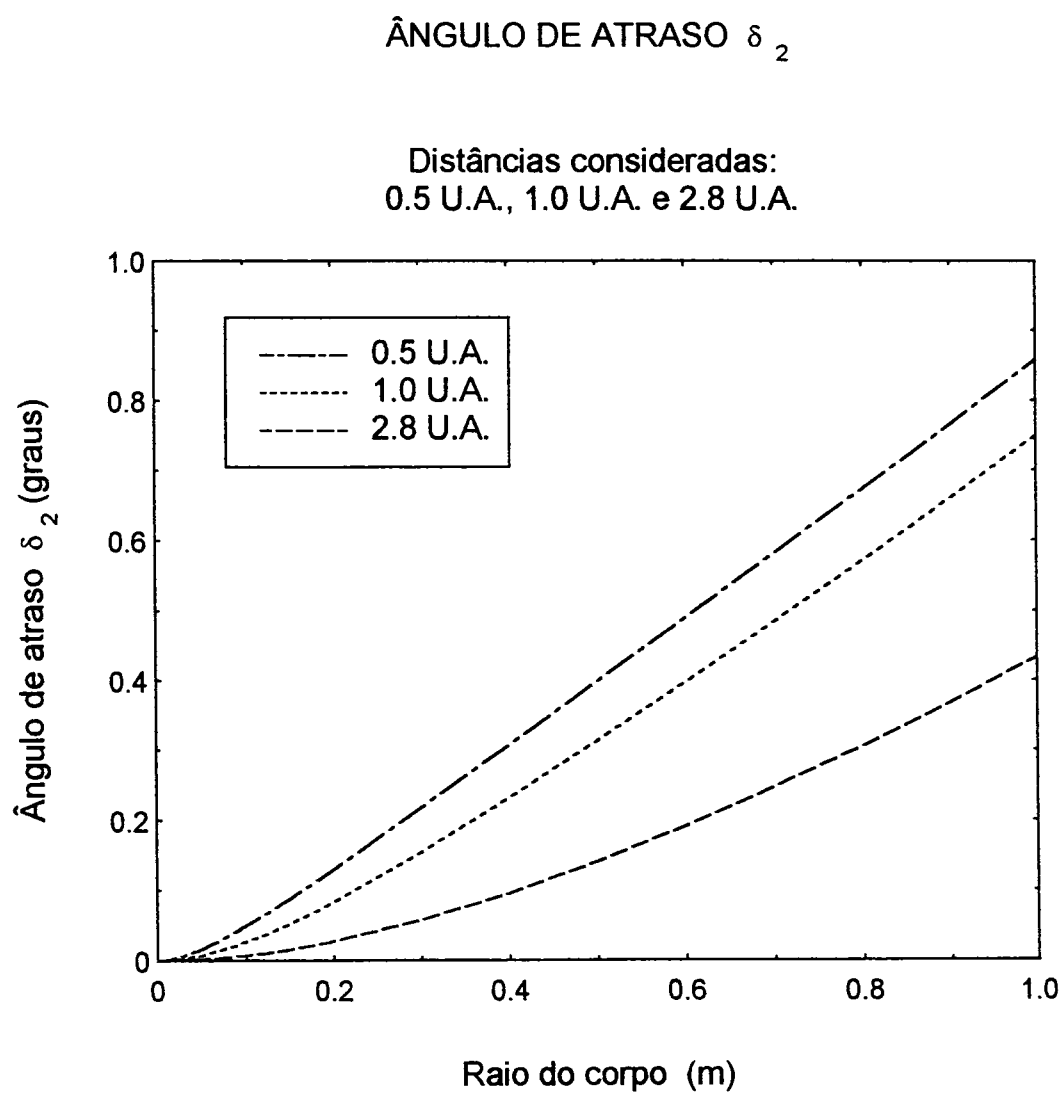


Figura 2.5

MÓDULO DA ACELERAÇÃO MÉDIA  $\langle S \rangle$ 

Distâncias consideradas:

0.5 U.A., 1.0 U.A. e 2.8 U.A.

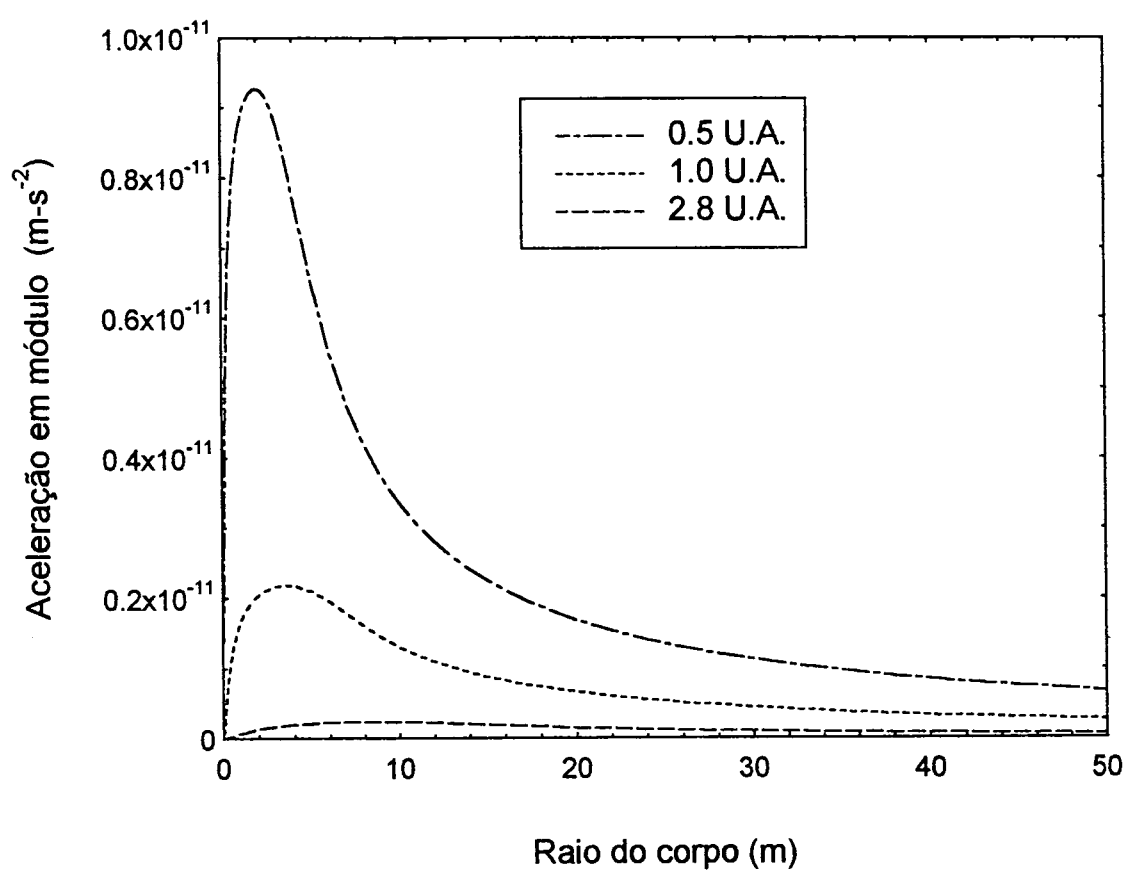


Figura 2.6

MÓDULO DA ACELERAÇÃO MÉDIA  $\langle R \rangle$ 

Distâncias consideradas:

0.5 U.A., 1.0 U.A. e 2.8 U.A.

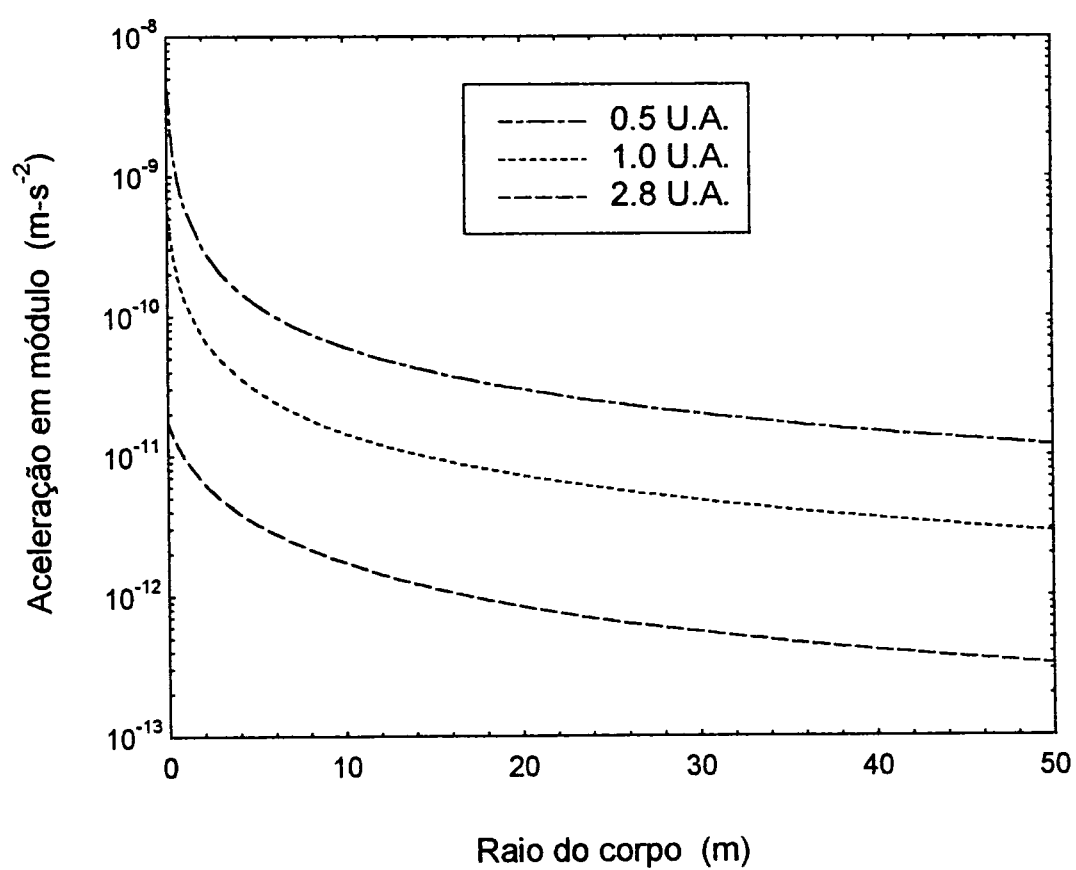


Figura 2.7



## TEMPERATURA MÉDIA NA SUPERFÍCIE DO CORPO

$$T_0 = T_{01} / \sqrt{r}$$

$r \Rightarrow$  distância do corpo à fonte de energia

$T_{01} \Rightarrow$  Tem. média do corpo para 1.0 U.A.

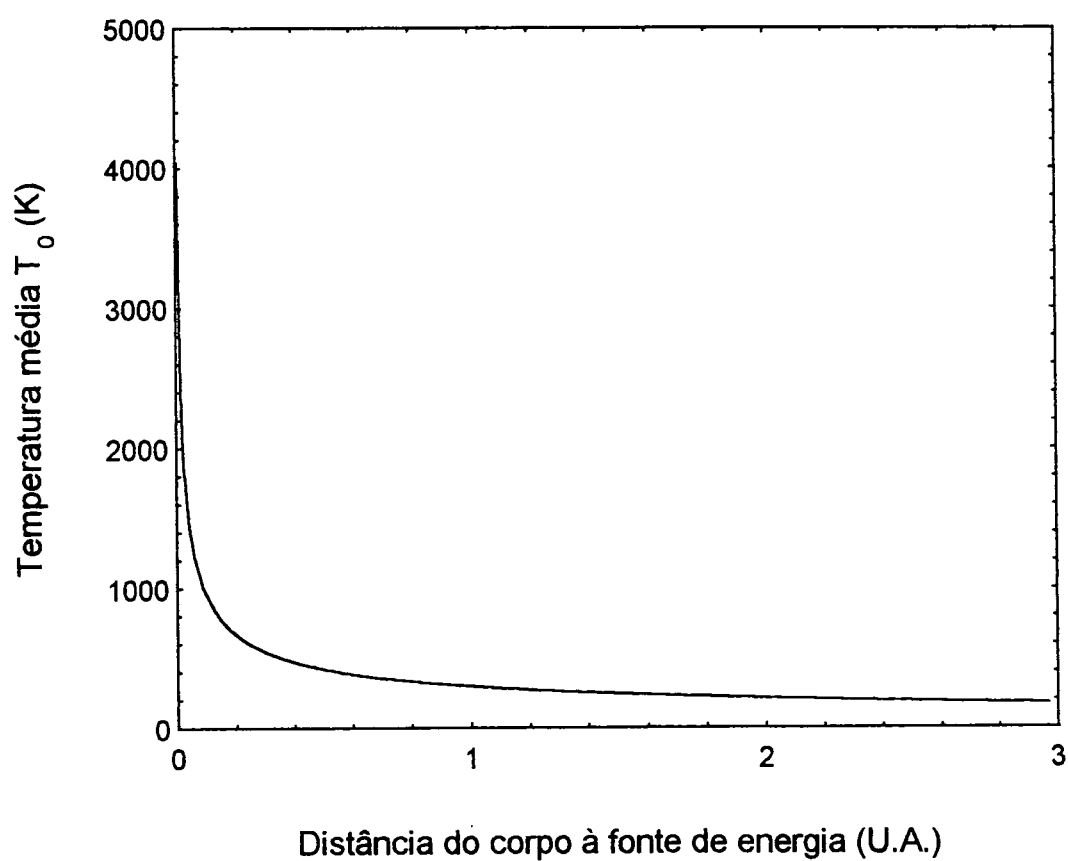


Figura 2.8

MÓDULO DE  $Y/X$ 

Raio do corpo considerado:

2 m, 5 m, 10 m e 20 m.

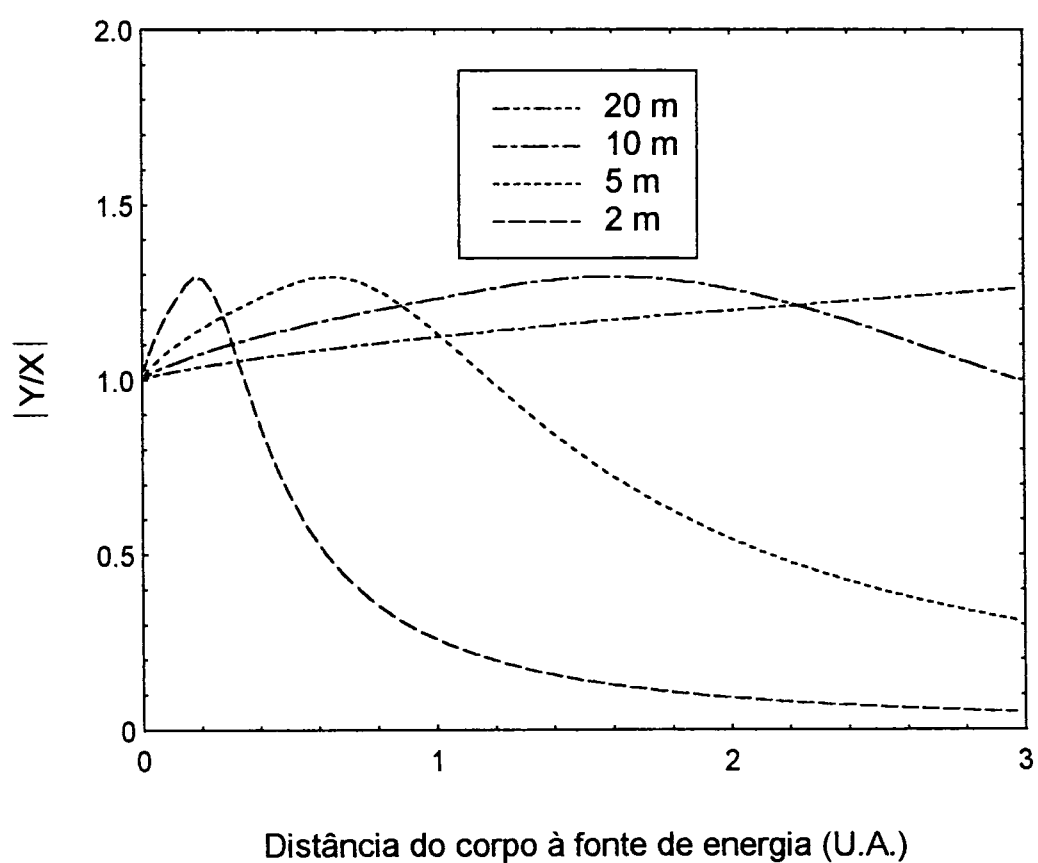


Figura 2.9

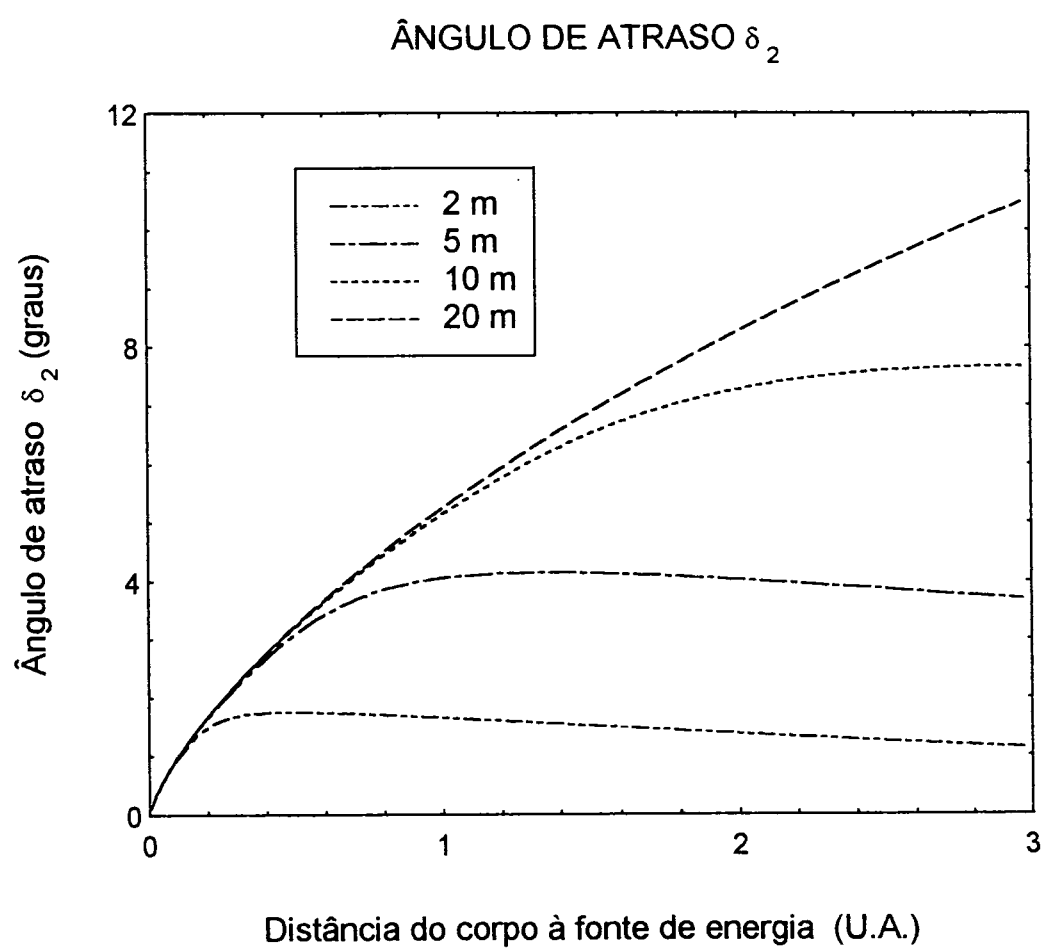


Figura 2.10

## CAPÍTULO 3

### COMPARAÇÃO COM OUTROS EFEITOS

#### 3.1 Efeito Yarkovsky

Quando o eixo de rotação do corpo é perpendicular ao plano orbital da fonte,  $\theta' = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta' = 0$  (portanto, não há efeito Inverno-Verão), e  $\sin \theta' = 1$ , ou seja a força de reemissão térmica se deve, unicamente, ao efeito Noite-Dia. Nestas condições o efeito Noite- Dia se iguala ao efeito Yarkovsky, e a eq.(1.3.38) resume-se a:

$$\Delta I(\theta, \phi, t) = n_f I_0 \sin \theta \cos(\phi - \omega t), \quad (3.1.1)$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular do corpo, e  $n_f$  o fator de normalização. Integramos  $\Delta I$  como segue:

$$\int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} n_f I_0 \sin \theta \cos(\phi - \omega t) d\theta d(\phi - \omega t) = I_0, \quad (3.1.2)$$

e, obtemos  $n_f = \frac{1}{4}$  e  $\Delta I_{max} = \frac{I_0}{4}$ . Usando (1.3.39) obtemos  $f_{1,0} = \frac{1}{4}$  e  $f_{1,1} = \frac{1}{4} \sin \theta' = \frac{1}{4}$ . A expressão para a aceleração resulta em:

$$\vec{a} = \frac{-\alpha I_0}{6\rho c R \left(1 + \frac{kX}{4\epsilon\sigma T_0^3}\right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \left[ \cos(\omega t - \delta) \hat{i} + \sin(\omega t - \delta) \hat{j} \right] \quad (3.1.3)$$

Noite e dia possuem períodos iguais para todas as latitudes. Este efeito pode ser chamado de efeito Yarkovsky. Neste caso, a força térmica resultante é igual a força Yarkovsky ( $\vec{F}_Y$ ).

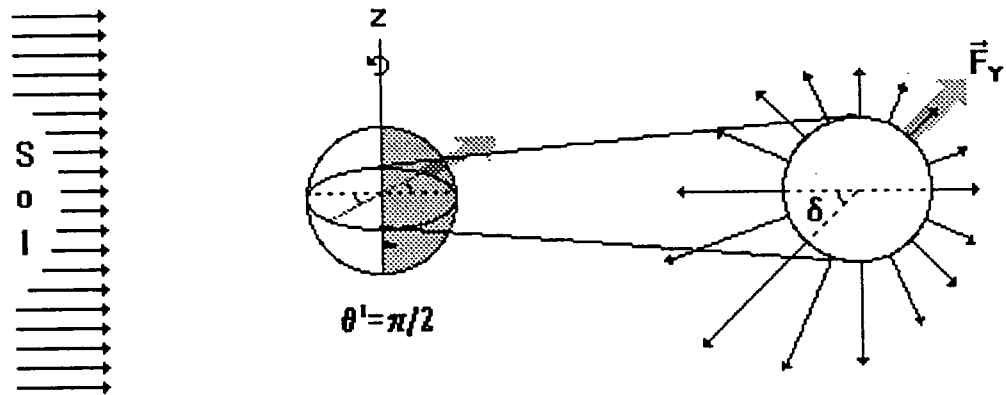


Figura 3.1 - A Força Yarkovsky

O efeito Inverno-Verão é nulo ( $\cos \theta' = 0$ ) e o ângulo de atraso  $\delta$  é igual à  $\delta_1$ . A Fig.(3.1) mostra como a assimetria na perda de momento resulta em uma força no plano xy que, para este caso especial, coincide com o plano RS. A aceleração possui, então, apenas duas componentes no sistema RSW, uma radial e outra transversal:

$$R = \vec{a} \cdot \hat{r} = \vec{a} \cdot (\cos \omega t \hat{i} + \sin \omega t \hat{j}), \quad (3.1.4)$$

$$S = \vec{a} \cdot \hat{s} = \vec{a} \cdot (\sin \omega t \hat{i} + \cos \omega t \hat{j}). \quad (3.1.5)$$

Calculando o valor médio de S para uma rotação obtemos:

$$\langle S \rangle = \frac{\alpha I_0}{6 \rho c R \left( 1 + \frac{kX}{4 \epsilon \sigma T_0^3} \right) (1 + \xi^2)^{\frac{1}{2}}} \sin \delta. \quad (3.1.6)$$

O efeito Noite-Dia depende de forma crucial da geometria spin-órbita. Quando o eixo de spin é normal ao plano orbital ( $\theta' = \pi/2$ ) o efeito é máximo, e é conhecido como efeito Yarkovsky.

### 3.2 Efeito Noite-Dia

A eq.(3.1.3) para a aceleração Noite-Dia (Yarkovsky) pode ser usada apenas, para um corpo cujo eixo de rotação é perpendicular à seu plano orbital ( $\theta' = \pi/2 = \text{constante}$ ). Uma vez que, essa restrição é muito forte, pois limita as possibilidades de aplicação em casos reais, vamos agora, obter a equação da aceleração Noite-Dia para o caso geral em que  $\theta'$ , a colatitude do Sol, varia ao longo de um período orbital.

Para tornar a análise do problema mais simples, vamos supor que  $n_f = 1/4$  e que o eixo de rotação encontra-se no plano orbital. Desta forma, obteremos a aceleração Noite-Dia complementar à aceleração Inverno-Verão para este caso (eixo no plano). Lembrando aqui, que as forças Noite-Dia e Inverno-Verão são apenas as componentes  $xy$  e  $z$ , respectivamente, da força Térmica Total, vamos proceder à análise do problema, conforme a Fig.(3.2). A aceleração pode ser expressa da seguinte forma:

$$\vec{a} = \vec{a}_{rs} + \vec{a}_w = a_{rs}\hat{r}s + a_w\hat{w}; \quad (3.2.1)$$

onde  $\hat{r}s$  é o vetor unitário no plano RS. Como  $a_{rs} = a \cos \delta_1$ ,  $a_w = a \sin \delta_1$ , e

$$\hat{r}s = \sin n\hat{r} + \cos n\hat{s}, \quad (3.2.2)$$

temos:

$$\vec{a} = a \cos \delta_1 (\sin n\hat{r} + \cos n\hat{s}) + a \sin \delta_1 \hat{w}. \quad (3.2.3)$$

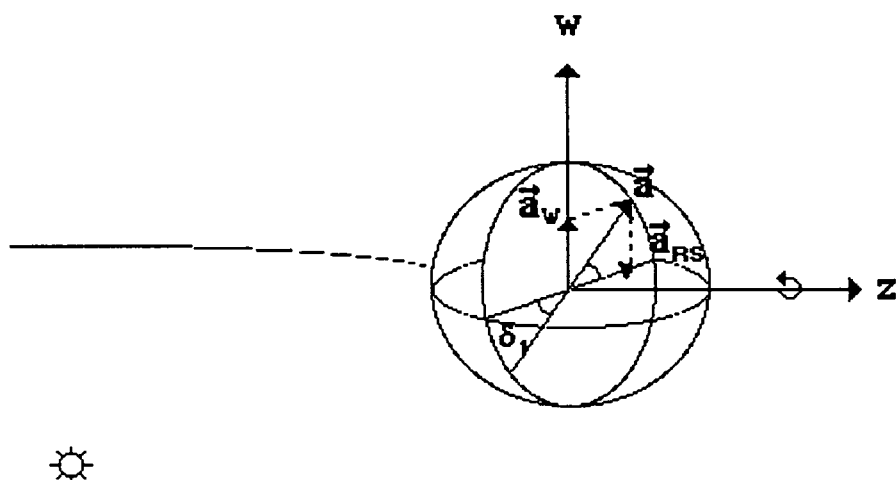


Figura 3.2 - Eixo z no Plano e a Aceleração Noite-Dia

Ou seja, a aceleração possui três componentes no sistema (R,S,W):

$$R = B_1 \sin(nt - \delta_2) \cos \delta_1 \sin nt, \quad (3.2.4)$$

$$S = B_1 \sin(nt - \delta_2) \cos \delta_1 \cos nt, \quad (3.2.5)$$

$$W = B_1 \sin(nt - \delta_2) \sin \delta_1; \quad (3.2.6)$$

onde usamos  $a = B_1 \sin(nt - \delta_2)$ .

A média para uma revolução é dada por:

$$\langle S \rangle = \frac{B_1 \cos \delta_1}{2\pi} \left( \underbrace{\cos \delta_2 \int_0^{2\pi} \sin nt \cos nt d(nt)}_{=0} - \sin \delta_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 nt d(nt)}_{=2\pi} \right), \quad (3.2.7)$$

$$\langle S \rangle = -B_1 \cos \delta_1 \sin \delta_2. \quad (3.2.8)$$

De forma semelhante, temos:

$$\langle R \rangle = B_1 \cos \delta_1 \cos \delta_2, \quad (3.2.9)$$

$$\langle W \rangle = 0. \quad (3.2.10)$$

Substituindo  $B_1$  nas eqs.(3.2.8) e (3.2.9), resulta:

$$\langle S \rangle = \frac{\alpha I_0 \cos \delta_1 \sin \delta_2}{12\rho c R \left(1 + \frac{kX_1}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_1^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.2.11)$$

$$\langle R \rangle = -\frac{\alpha I_0 \cos \delta_1 \cos \delta_2}{12\rho c R \left(1 + \frac{kX_1}{4\epsilon\sigma T_o^3}\right) (1 + \xi_1^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.2.12)$$

Vamos agora, comparar os efeitos Noite-Dia e Yarkovsky com o efeito Inverno-Verão através de uma análise do módulo de suas componentes transversais médias. A Fig.(3.4) apresenta  $\langle S \rangle$  (em módulo) para os três casos: Inverno-Verão (eixo de rotação no plano), Noite-Dia (eixo de rotação no plano) e Yarkovsky (eixo de rotação perpendicular ao plano: Noite-Dia). A medida que nos aproximamos do Sol observamos que os efeitos se aproximam em intensidade. Para, aproximadamente, 0.6 U.A. observamos uma região onde as três curvas se encontram e os efeitos se equivalem. Porém, para distâncias menores do que 0.6 U.A. apenas Inverno-Verão e Noite-Dia mantém essa equivalência; o efeito Yarkovsky começa a perder em intensidade para os outros dois efeitos. Esta região de transição depende das características do corpo, portanto, corpos com raios diferentes, por exemplo, terão regiões de transição diferentes (mais próximas ou mais distantes do Sol).



### 3.3 Efeito Poynting-Robertson

Quando um corpo em movimento emite radiação, observamos que os fótons emitidos no sentido do movimento, têm frequência maior do que a frequência observada quando o corpo está em repouso (efeito Doppler). E, de forma semelhante, os fótons emitidos em sentido contrário ao movimento do corpo têm frequência menor do que em repouso. Portanto, um corpo em repouso, com distribuição de temperaturas isotrópica, emite radiação com a mesma frequência em todas as direções e todos os momentos (associados aos fótons) se cancelam. Neste caso, não há força atuando sobre o corpo. Porém, se o corpo estiver em movimento a perda de momento não será a mesma em todas as direções: os fótons emitidos no sentido do movimento terão suas frequências aumentadas; enquanto que no sentido contrário as frequências serão menores. Uma vez que a perda de momento será maior no sentido do movimento surge, como consequência, uma força em sentido contrário, veja a Fig. (3.3). Este é o efeito Poynting-Robertson.

A força Poynting-Robertson encontra-se sempre no plano orbital do corpo, logo a aceleração possui apenas as componentes radial e transversal no sistema (R,S,W) dadas, a seguir, por:

$$R = \alpha \left( \frac{c}{r^2} - \frac{2\dot{r}}{r^2} \right), \quad (3.3.1)$$

$$S = -\frac{\alpha \dot{f}}{r}; \quad (3.3.2)$$

onde,  $c$  é a velocidade da luz,  $f$  é a anomalia verdadeira, e  $\dot{f}$  sua derivada temporal.

Observe, ainda, que  $\alpha$  é uma constante que depende do raio da partícula, e de sua densidade volumétrica

$$\alpha = \frac{2.5 \times 10^{11}}{R\rho} cm^2 s^{-1} \quad (3.3.3)$$

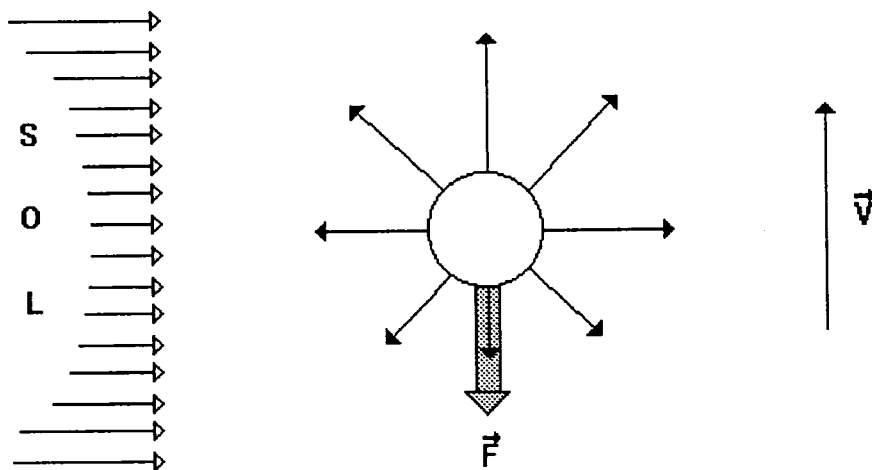


Figura 3.3 - Efeito Poynting-Robertson

A seguir, na Fig.(3.5) vemos uma comparação entre os módulos da aceleração transversal dos efeitos Poynting-Robertson e Inverno-Verão para o nosso corpo-teste (raio = 0.5 m) em função da distância à fonte. O efeito Inverno-Verão é mais significativo, neste caso, do que o efeito Poynting-Robertson.

Tanto o efeito Inverno-Verão quanto o efeito Poynting-Robertson tem sua intensidade modulada pelo raio do corpo. Veja, agora, na Fig.(3.6) como  $|\langle S \rangle|$  varia em função do raio do corpo para os dois efeitos. A componente  $\langle S \rangle$  do efeito Poynting-Robertson é mais significativa para raios menores do que 0.5 metros, porém, para raios acima desse valor o efeito Inverno-Verão ganha em intensidade. No ponto de encontro entre as duas curvas os efeitos se equivalem. À distância de 2.8 U.A. a equivalência entre os dois efeitos ocorre para corpos com raio igual a 0.5 metro, porém a medida que nos aproximamos da fonte de energia este valor diminui. De forma geral, o efeito Inverno-Verão é mais forte do que o efeito Poynting-Robertson, para corpos da ordem do metro.

# MÓDULO DA ACELERAÇÃO MÉDIA $\langle S \rangle$

Para os seguintes efeitos:

Inverno-Verão

Noite-Dia

Yarkovsky

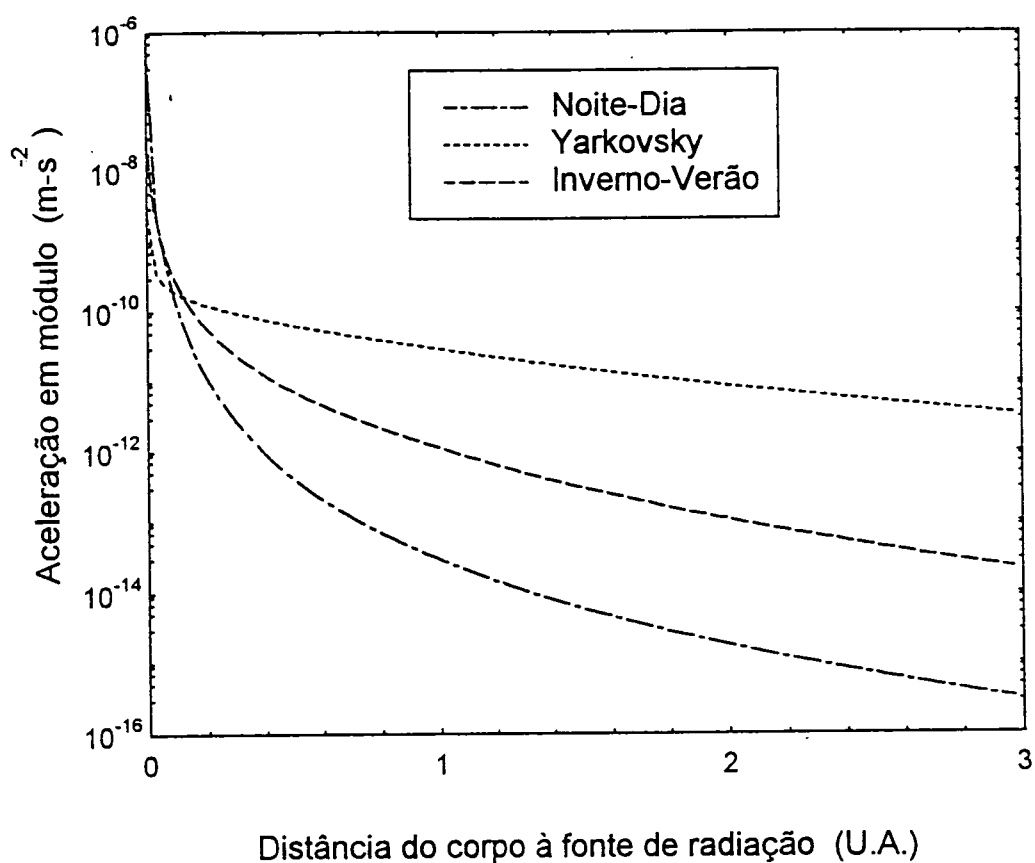


Figura 3.4

Raio do corpo = 0.5 m

# MÓDULO DA ACELERAÇÃO MÉDIA $\langle S \rangle$

Para os seguintes efeitos:

Inverno-Verão  
Poynting-Robertson

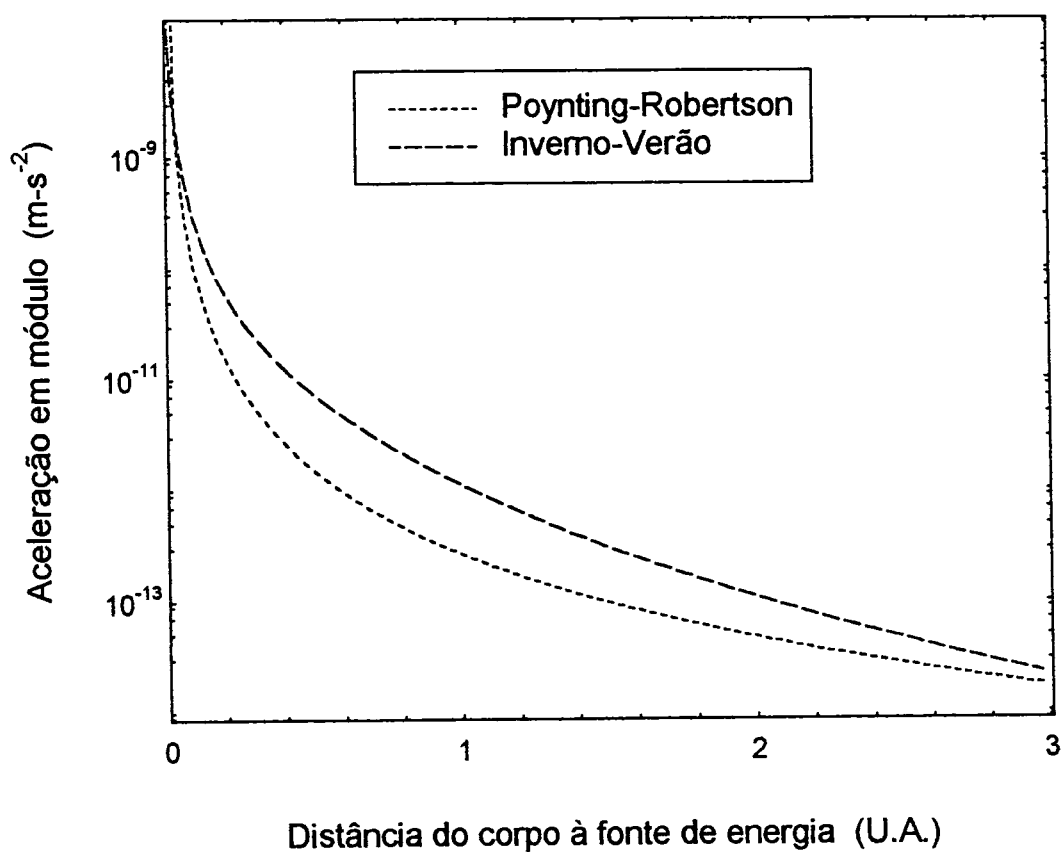


Figura 3.5

Raio do corpo = 0.5 m

# MÓDULO DA ACELERAÇÃO MÉDIA $\langle S \rangle$

Para os seguintes efeitos:

Inverno-Verão  
Poynting-Robertson

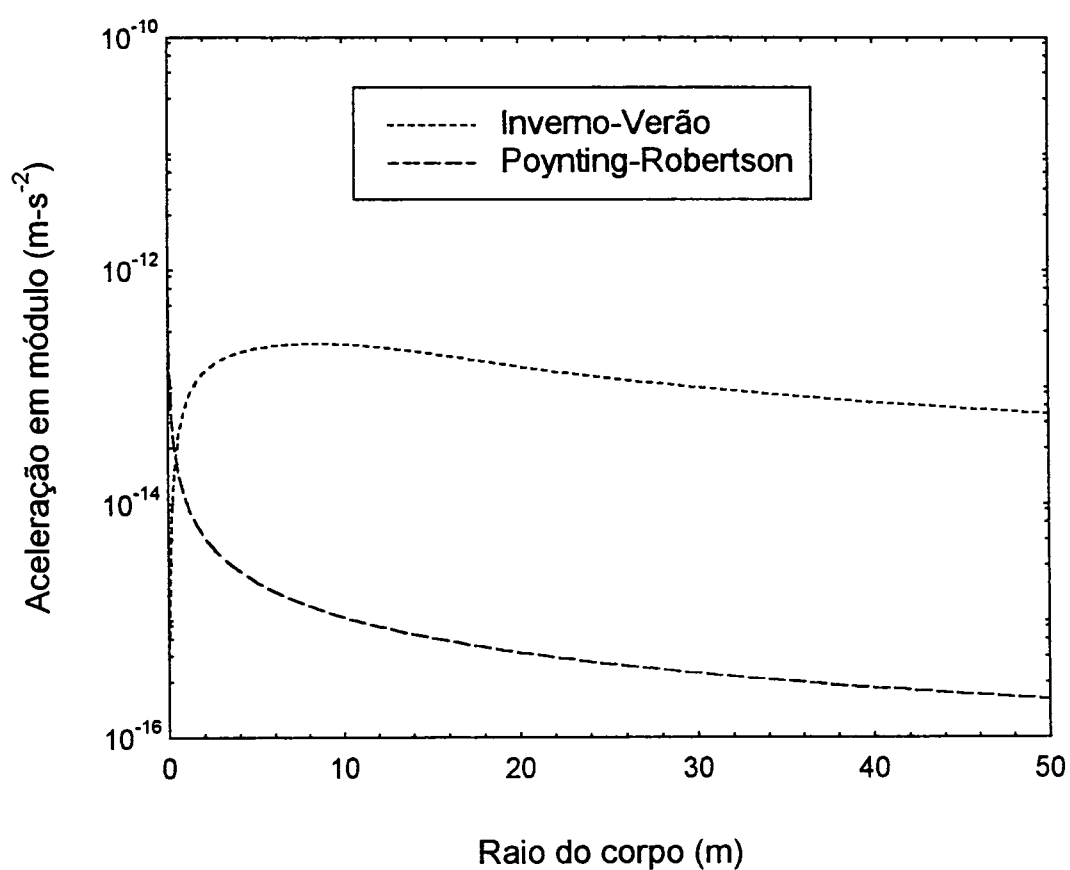


Figura 3.6

Distância à fonte de energia = 2.8 U.A.

## CAPÍTULO 4

### APLICAÇÕES

#### 4.1 O Problema de Dois Corpos com a Perturbação Inverno-Verão

Vamos, agora, aplicar a força Inverno-Verão ao nosso corpo-teste, considerando que o eixo de rotação do corpo encontra-se no plano. O corpo possui frequência de rotação arbitrária e frequência orbital igual à  $1/T$ ; onde  $T$  é o período orbital. No sistema osculador a aceleração é expressa por (1.8.18) e (1.8.19); onde usamos:

$$I_0 = I_{01} \left( \frac{1}{r} \right)^2, \quad T_0 = T_{01} \left( \frac{1}{r} \right)^{1/2}. \quad (4.1.1)$$

$I_{01} = 1400 \text{ W m}^{-2}$  e  $T_{01} = 298 \text{ K}$  são, respectivamente, a irradiância e a temperatura médias para uma distância igual à 1.0 U.A. As condições iniciais são: semi-eixo maior ( $A_0$ ) igual a 2.8 U.A., excentricidade ( $E_0$ ) igual a 0.01 e demais elementos osculadores nulos.

A força Inverno-Verão é dissipativa, logo semi-eixo maior e excentricidade irão decrescer ao longo do tempo. Nas Figs.(4.2) e (4.3) temos a variação do semi-eixo maior e da excentricidade devido a força de perturbação Inverno-Verão, para o problema de dois corpos (Sol e meteoróide).

Comparamos os resultados obtidos analiticamente, eqs.(1.8.1.16) e (1.8.1.17) com os resultados obtidos através de cálculo numérico.

## 4.2 O Problema de Três Corpos com a Perturbação Inverno-Verão

Nas figs.(4.4) e (4.5) temos a variação do semi-eixo maior e da excentricidade para o problema de três corpos (Sol, Júpiter e meteoróide). O programa que integra numericamente o sistema de equações (Apêndice 2) dado à seguir:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \omega_4, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \omega_5, \quad \frac{d\omega_3}{dt} = \omega_6, \quad (4.2.1)$$

$$\frac{d\omega_4}{dt} = -\frac{km_s}{r^3}\omega_1 - \frac{km_j}{r_*^3}(\omega_1 - x_j) + a_x, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{d\omega_5}{dt} = -\frac{kk_s}{r^3}\omega_2 - \frac{km_j}{r_*^3}(\omega_2 - y_j) + a_y, \quad (4.2.3)$$

$$\frac{d\omega_6}{dt} = -\frac{km_s}{r^3}\omega_3 - \frac{km_j}{r_*^3}(\omega_3 - z_j) + a_z. \quad (4.2.4)$$

utiliza o método de Runge-Kutta de 5ª ordem [1]. Os dados de entrada e saída são expressos em elementos osculadores, enquanto que os cálculos internos são efetuados em coordenadas cartesianas.

As condições iniciais são:  $A_0 = 2.84 \text{ U.A.}$ ,  $E_0 = 0.01$  e demais elementos osculadores nulos. Observe que, o semi-eixo maior decresce gradativamente, até atingir aproximadamente,  $2.82 \text{ U.A.}$ , quando entra em ressonância com Júpiter (5:2). Neste ponto, o valor médio para o semi-eixo maior se estabiliza em torno de  $2.82 \text{ U.A.}$  e o corpo é aprisionado; a excentricidade aumenta significativamente transformando o formato da órbita e aproximando o meteoróide dos planetas internos ao cinturão de asteróides.

## VARIAÇÃO TEMPORAL DO SEMI-EIXO MAIOR

Condições iniciais:

$$A = 2.8 \text{ U.A.}$$

$$E = 0.01$$

$$I = \Omega = \omega = 0$$

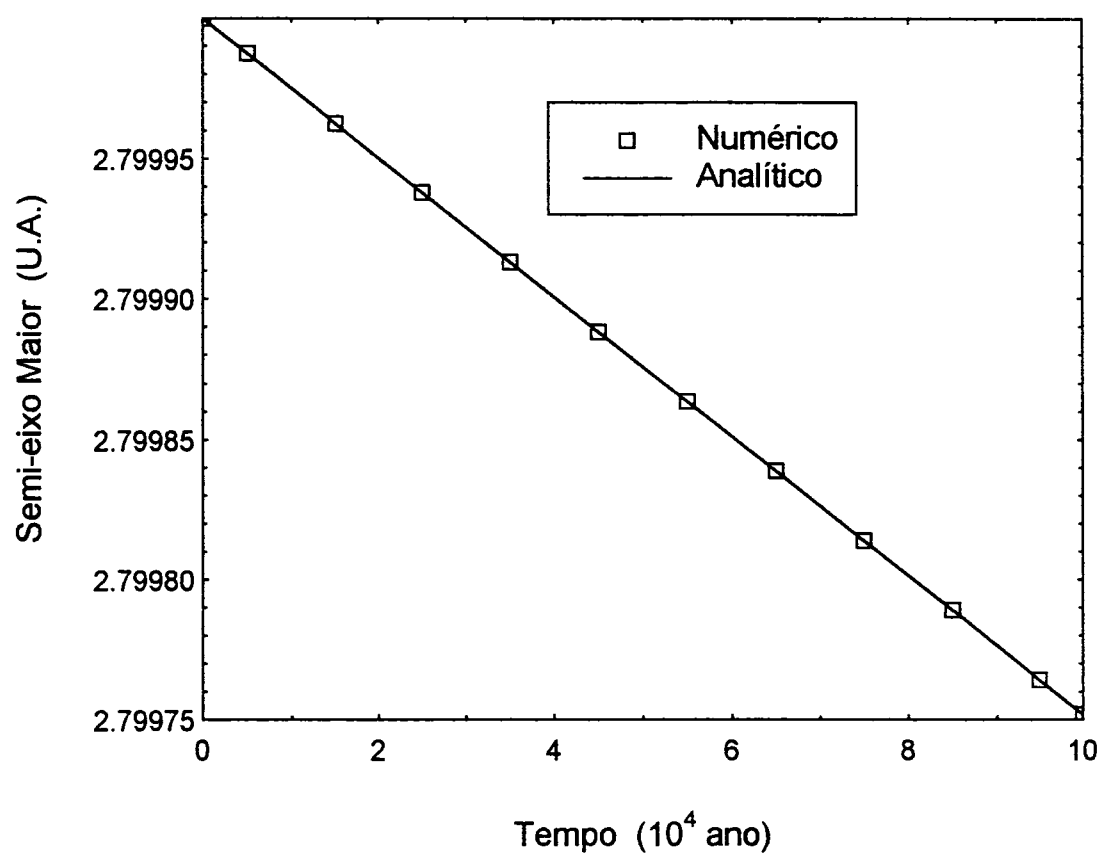


Figura 4.2



## VARIAÇÃO TEMPORAL DA EXCENTRICIDADE

Condições iniciais:

$$A = 2.8 \text{ U.A.}$$

$$E = 0.01$$

$$I = \Omega = \omega = 0$$

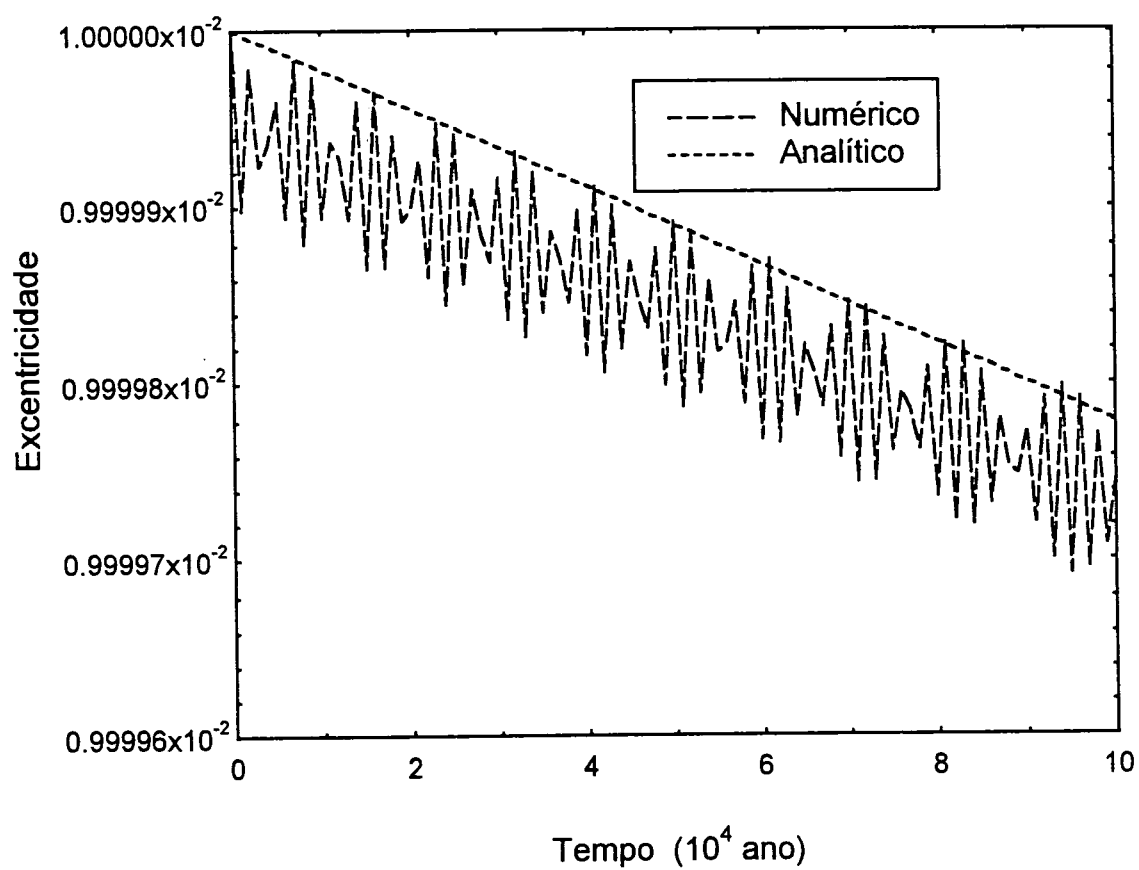


Figura 4.3

## VARIAÇÃO TEMPORAL DO SEMI-EIXO MAIOR

Condições iniciais:

$$A = 2.84 \text{ U.A.}$$

$$E = 0.01$$

$$I = \Omega = \omega = 0$$

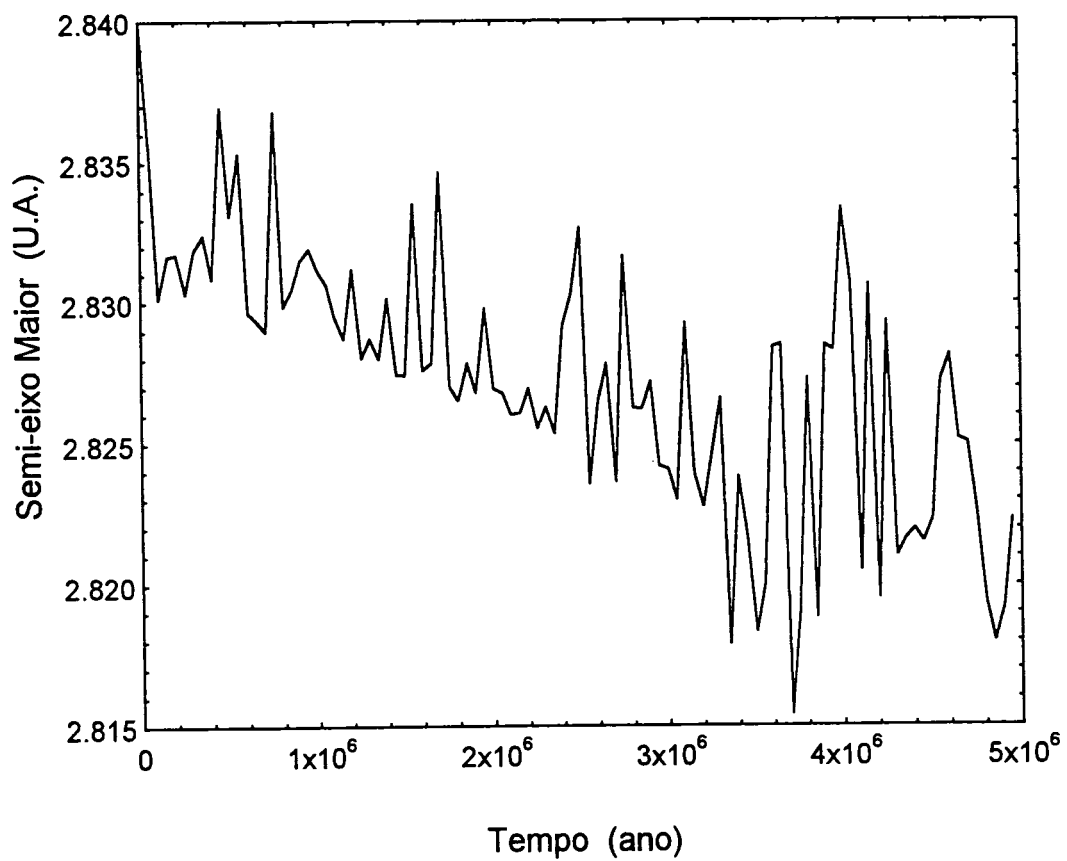


Figura 4.4

Três corpos: Sol, Júpiter e meteoróide.

## VARIAÇÃO TEMPORAL DA EXCENTRICIDADE

Condições iniciais:

$$A = 2.84 \text{ U.A.}$$

$$E = 0.01$$

$$I = \Omega = \omega = 0$$

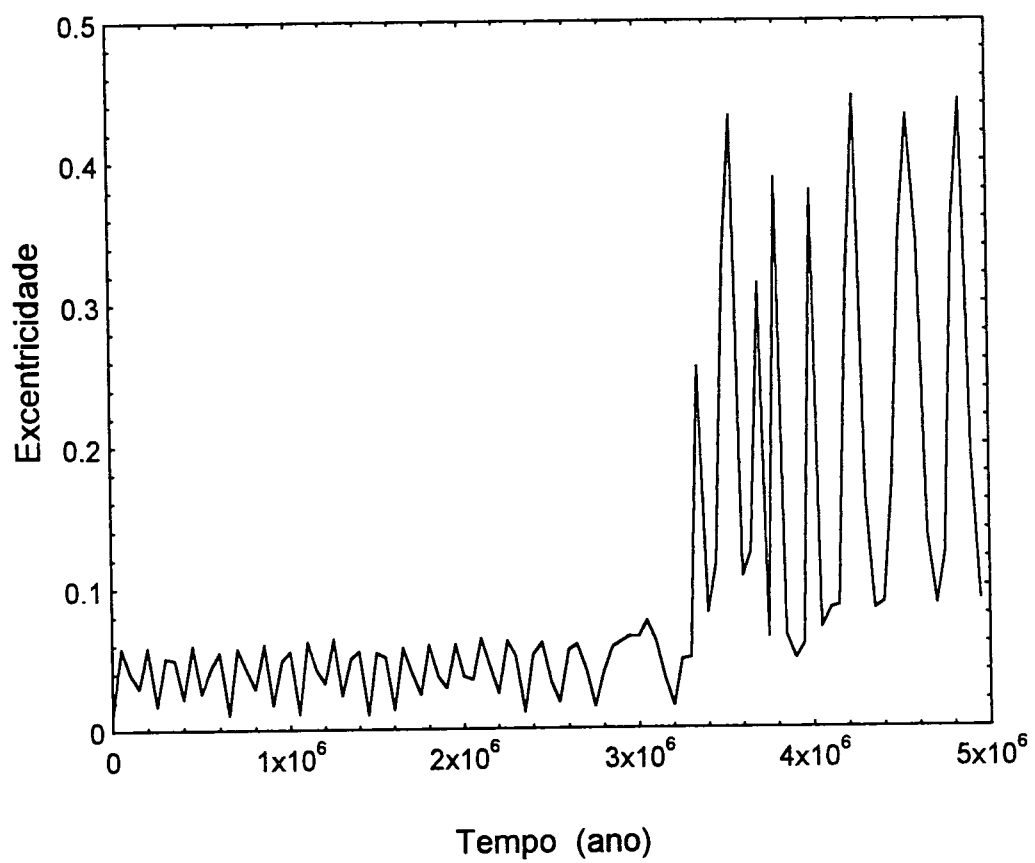


Figura 4.5

Três corpos: Sol, Júpiter e meteoróide

## DISCUSSÃO

A força Inverno-Verão tem sua direção controlada pelo ângulo de atraso que determina a proporção de suas componentes radial e transversal. Para nosso corpo teste, por exemplo, o ângulo de atraso cresce a medida que este se aproxima do Sol. Isto significa que a componente transversal da aceleração ganha intensidade e o efeito Inverno-Verão torna-se mais sensível. Observe porém, que à aproximadamente 0.06 U.A. (10 raios solares), a curva que representa o ângulo de atraso muda de inclinação decrescendo rapidamente. Neste ponto a força Inverno-Verão tende a orientar-se por completo na direção radial. A componente radial da aceleração Inverno-Verão, no plano, é mais significativa do que sua componente transversal. A evolução secular dos elementos orbitais para um corpo com eixo de rotação no plano é consequência portanto, da ação da componente transversal da aceleração.

Distância à fonte de energia radiante e raio do corpo, são fatores que determinam mudanças no módulo e na direção da força Inverno-Verão. A curva que representa a aceleração média  $S$  possui um pico, que se desloca para diferentes valores da distância à fonte de energia e seleciona os corpos que irão sentir a força Inverno-Verão com maior intensidade. À 2.8 U.A. o pico está na faixa dos oito metros, quatro metros para 1.0 U.A., dois metros para 0.5 U.A. e assim por diante. Portanto, existe um fator seletivo característico do efeito Inverno-Verão ligado ao tamanho do corpo. Este fator seletivo pode ter influenciado a formação do nosso Sistema Solar. Distância à fonte de radiação e diâmetro do corpo são fatores capazes de alterar a intensidade e direção das forças atuantes no corpo, criando uma espécie de ordem na formação progressiva de um Sistema Planetário.

O efeito Inverno-Verão é um efeito dissipativo capaz de perturbar todos os elementos orbitais do corpo, uma vez que a ação de sua força não se restringe ao plano

orbital, e cuja ordem de grandeza pode ser maior do que no efeito Poynting-Robertson. Sua aplicação está relacionada a estudos que envolvam o processo de formação de Sistemas Planetários, assim como, na evolução dos elementos orbitais de satélites artificiais, fragmentos de asteróides, núcleos de cometas extintos, etc...

A força Inverno-Verão somada a força Noite-Dia (Yarkovsky Generalizada) compõe a chamada força Térmica Resultante que atua em corpos aquecidos. Aliada a outras forças, como por exemplo, a perturbação gravitacional de Júpiter, é capaz de explicar a evolução orbital de fragmentos de asteróides provenientes do Cinturão de Asteróides, e sua consequente aproximação da Terra. A força Yarkovsky tem sido utilizada, de forma não realista, para explicar a evolução orbital de fragmentos de asteróides cuja frequência de rotação é grande o suficiente para tornar o efeito Yarkovsky desprezível. Além disso, a aplicabilidade do efeito Yarkovsky depende do conhecimento da frequência de rotação do corpo, que nem sempre é fácil de se determinar. O efeito Inverno-Verão não depende da frequência de rotação, o que torna sua utilização mais simples e seus resultados mais precisos.

## CONCLUSÃO

O efeito Inverno-Verão é um efeito puramente dissipativo que perturba todos os elementos orbitais do corpo, uma vez que a ação de sua força não se restringe ao plano orbital. Não depende da frequência de rotação do corpo e pode ser expresso em função do inverso do quadrado da distância à fonte.

Quando complementado pelo efeito Noite-Dia (Yarkovsky Generalizado) resulta no efeito Térmico Total, que é mais significativo do que o efeito Yarkovsky.

Associado à força de perturbação de Júpiter é capaz de explicar como corpos provenientes do cinturão de asteróides chegam às regiões de ressonância, onde tem suas excentricidades aumentadas à ponto de cruzarem a órbita dos planetas internos ao cinturão.

Além disso, apresenta um efeito seletivo associado ao raio do corpo e a distância à fonte, que pode ser usado em estudos que envolvam a formação de Sistemas Planetários.

## APÊNDICE 1

### Energia de Colisão versus Ângulo de Impacto

Um meteoróide em rota de colisão com a Terra possui um potencial de impacto que depende da velocidade de colisão. A velocidade do meteoróide pode ser decomposta em duas velocidades relativas, uma paralela à velocidade orbital da Terra e outra perpendicular, como segue:

$$\vec{v}_m = \vec{v}_{m\parallel} + \vec{v}_{m\perp}.$$

A velocidade de colisão é dada por:

$$\vec{v}_c = \vec{v}_m - \vec{v}_T,$$

$$\vec{v}_c = (\vec{v}_{m\parallel} - \vec{v}_T) + \vec{v}_{m\perp},$$

$$v_c = [(v_{m\parallel} - v_T)^2 + v_{m\perp}^2]^{1/2};$$

onde,  $v_{m\parallel} = v_m \cos \theta$ ,  $v_{m\perp} = v_m \sin \theta$ , e a equação acima se transforma em:

$$v_c = [(v_m \cos \theta - v_T)^2 + (v_m \sin \theta)^2]^{1/2}. \quad (1.1)$$

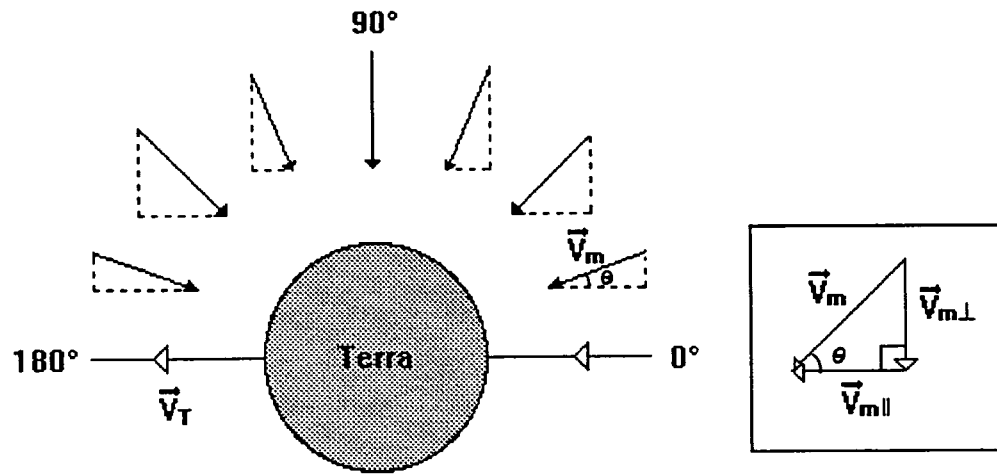


Figura - Ângulo de Impacto: Terra versus Meteoróide

A energia liberada no impacto é dada por:

$$E = \frac{1}{2}mv_c^2. \quad (1.2)$$

Supondo que o corpo é esférico ( $m = \frac{\pi}{6}\rho d^3$ ), obtemos:

$$E = \frac{\pi}{12}\rho d^3 v_c^2. \quad (1.3)$$

A energia pode ser expressa em termos de megatons (MT) de TNT, através da seguinte relação:

$$E = \frac{\pi}{12}\rho d^3 v_c^2 / 4.19 \times 10^6; \quad (1.4)$$

onde,  $\rho$  é a densidade volumétrica ( $ton/km^3$ ),  $d$  é o diâmetro do meteoróide ( $km$ ), e  $v_c$  a velocidade de colisão ( $km/s$ ), e



$$1MT = 4,19 \times 10^6 \text{ ton} \frac{\text{km}^2}{\text{s}^2} = 4,19 \times 10^{15} J$$

A Tabela, a seguir, mostra a energia liberada na colisão de um meteoróide ferroso (10 m de diâmetro e velocidade orbital igual a 40 km/s) com a Terra (velocidade orbital igual a 30 km/s) para diferentes ângulos de impacto. Observe como a velocidade de colisão varia significativamente para cada ângulo.

Podemos, ainda, considerar a velocidade de colisão como uma constante. Neste caso, se variarmos o diâmetro do corpo vamos obter as mesmas energias para cada ângulo, ou seja, para cada valor de energia há um diâmetro equivalente  $d_e$ , e portanto, podemos dizer que o corpo *aumenta* ou *diminui* de tamanho conforme a direção e sentido da colisão.

Uma colisão frontal com a Terra *aumenta* o diâmetro do corpo de 10.0 para 14.5 metros enquanto que, o oposto *diminui* o diâmetro para 4.0 m.

**Tabela**

Ângulo $\theta$ (graus)	0	30	60	90	120	150	180
Velocidade de colisão V (km/s)	10,0	20,5	36,1	40,0	60,8	67,7	70,0
Energia equivalente (MT de TNT)	0,05	0,21	0,31	0,80	1,85	2,30	2,46
Diâmetro relativo $d_r$ (m)	4	6,4	7,3	10	13,2	14,2	14,5

Corpos com diâmetro inferior a 50 metros, em geral, são detectados quando já estão muito próximos da Terra. A magnitude do impacto depende do ângulo entre as velocidades orbitais do meteoróide e do alvo em questão. Para a Terra, por exemplo, o horário de maior risco para um impacto é de 0 horas até as 12 horas, quando, tanto a taxa de incidência quanto a magnitude dos impactos atingirão valores máximos.

Qualquer programa de detecção de NEOS visando a defesa de nosso planeta contra possíveis impactos, deverá ter equipe e esforços redobrados neste horário, pois as chances serão bem mais significativas do que no período das 12 as 24 horas.

## APÊNDICE 2

### O Problema de Três Corpos com Perturbação Não-Gravitacional

Um corpo sob o efeito da atração gravitacional do Sol, e de Júpiter apresenta duas acelerações de origem gravitacional a serem levadas em considerção na equação de movimento. Se, além disso, acrescentarmos uma perturbação não gravitacional, teremos uma terceira aceleração que chamaremos de  $\vec{a}_p$ . A equação de movimento para esse corpo é dada por:

$$\ddot{\vec{r}} = -k m_s \frac{\vec{r}}{r^3} - k m_j \frac{\vec{r}_*}{r_*^3} + \vec{a}_p; \quad (1)$$

onde, o centro de massa do sistema coincide com o centro de massa do Sol.

No referencial XYZ do Sol, temos:

$$\vec{a}_p = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (2)$$

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}, \quad (3)$$

$$\vec{r}_j = x_j \hat{i} + y_j \hat{j} + z_j \hat{k}, \quad (4)$$

$$\vec{r}_* = (x - x_j) \hat{i} + (y - y_j) \hat{j} + (z - z_j) \hat{k}. \quad (5)$$

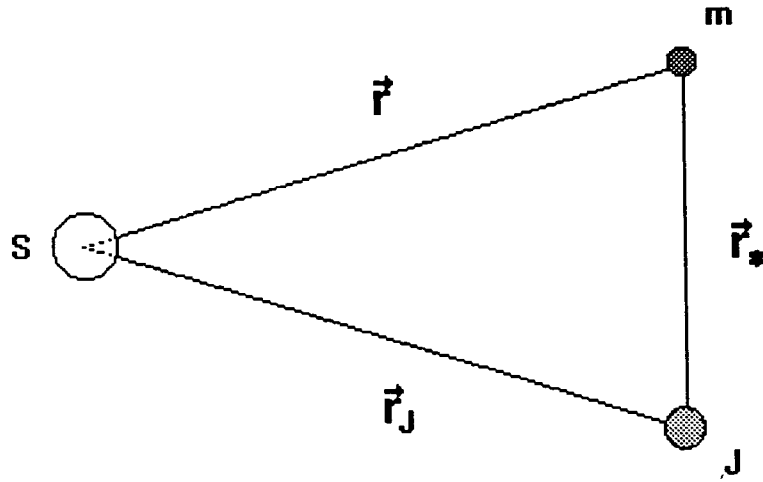


Figura - O Problema de Três Corpos

Sendo que, a velocidade e a aceleração do corpo são dadas por:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}, \quad (6)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}. \quad (7)$$

Substituindo as eqs.(2), (3) e (7) em (1) resulta em

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} = & -\frac{km_s}{r^3}[x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}] \\ & -\frac{km_j}{r^3}[(x - x_j)\hat{i} + (y - y_j)\hat{j} + (z - z_j)\hat{k}] + [a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Impondo, agora, a igualdade de vetores

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{km_s}{r^3}x - \frac{km_j}{r^3}(x - x_j) + a_x,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{km_s}{r^3}y - \frac{km_j}{r^3}(y - y_j) + a_y,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{km_s}{r^3}z - \frac{km_j}{r^3}(z - z_j) + a_z.$$

Para reduzir a ordem das equações acima, definimos as novas variáveis como segue:

$$\omega_1 = x, \quad \omega_2 = y, \quad \omega_3 = z;$$

e suas derivadas

$$\omega_4 = \frac{dx}{dt}, \quad \omega_5 = \frac{dy}{dt}, \quad \omega_6 = \frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d\omega_4}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d\omega_5}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad \frac{d\omega_6}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Substituindo no sistema equivalente original obtemos:

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \omega_4, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = \omega_5, \quad \frac{d\omega_3}{dt} = \omega_6, \quad (9)$$

$$\frac{d\omega_4}{dt} = -\frac{km_s}{r^3}\omega_1 - \frac{km_j}{r_*^3}(\omega_1 - x_j) + a_x, \quad (10)$$

$$\frac{d\omega_5}{dt} = -\frac{km_s}{r^3}\omega_2 - \frac{km_j}{r_*^3}(\omega_2 - y_j) + a_y, \quad (11)$$

$$\frac{d\omega_6}{dt} = -\frac{km_s}{r^3}\omega_3 - \frac{km_j}{r_*^3}(\omega_3 - z_j) + a_z. \quad (12)$$

Portanto (9), (10), (11), e (12) formam um novo sistema de equações, cuja solução pode ser obtida numericamente. A aceleração perturbadora  $a_p$  deve ser expressa no sistema cartesiano (X,Y,Z). O programa para obtenção da solução numérica desse

sistema de equações, utiliza o método de Runge- Kutta de 5ª ordem [1]. Os dados de entrada e saída são expressos em elementos osciladores, enquanto que os cálculos internos são efetuados em coordenadas cartesianas. A seguir, mostramos a transformação do vetor aceleração  $\vec{a}_p$  de sistema oscilador para sistema cartesiano.

### Transformação da Aceleração: de sistema oscilador (RSW) para sistema cartesiano (XYZ)

Nas eqs.(10), (11) e (12) a aceleração perturbadora  $a_p$  deve ser expressa em elementos cartesianos. A matriz de transformação é dada por:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x & Q_x & R_x \\ P_y & Q_y & R_y \\ P_z & Q_z & R_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{s} \\ \hat{w} \end{pmatrix} \quad (13)$$

De forma que

$$\begin{aligned} \hat{x} &= P_x \hat{r} + Q_x \hat{s} + R_x \hat{w} & \text{e} & \quad \hat{r} = P_x \hat{x} + P_y \hat{y} + P_z \hat{z}; \\ \hat{y} &= P_y \hat{r} + Q_y \hat{s} + R_y \hat{w} & \text{e} & \quad \hat{s} = Q_x \hat{x} + Q_y \hat{y} + Q_z \hat{z}; \\ \hat{z} &= P_z \hat{r} + Q_z \hat{s} + R_z \hat{w} & \text{e} & \quad \hat{w} = R_x \hat{x} + R_y \hat{y} + R_z \hat{z}; \end{aligned}$$

onde:

$$P_x = \cos\Omega \cos(\omega + f) - \sin\Omega \cos I \sin(\omega + f),$$

$$P_y = \sin\Omega \cos(\omega + f) + \cos\Omega \cos I \sin(\omega + f),$$

$$P_z = \sin I \sin(\omega + f),$$

$$Q_x = -\cos\Omega \sin(\omega + f) - \sin\Omega \cos I \cos(\omega + f),$$

$$Q_y = -\sin\Omega \sin(\omega + f) + \cos\Omega \cos I \cos(\omega + f),$$

$$Q_z = \sin I \cos(\omega + f),$$

$$R_x = \sin I \sin(\omega + f),$$

$$R_y = -\sin I \cos\Omega,$$

$$R_z = \cos I.$$

Portanto, um vetor qualquer pode ser transformado de um sistema para outro de forma direta, através de uma simples substituição. Dado o vetor aceleração  $\vec{a}_p$ , por exemplo, no sistema de referência RSW:

$$\vec{a}_p = a_r \hat{r} + a_s \hat{s} + a_w \hat{w}; \quad (14)$$

podemos expressá-lo no sistema XYZ, substituindo na equação acima os vetores unitários  $\hat{r}$ ,  $\hat{s}$  e  $\hat{w}$ . Desta forma obtemos:

$$\vec{a} = [a_r P_x + a_s Q_x + a_w R_x] \hat{x} + [a_r P_y + a_s Q_y + a_w R_y] \hat{y} + [a_r P_z + a_s Q_z + a_w R_z] \hat{z}. \quad (15)$$

E, de forma semelhante obtemos a transformação inversa.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] **Afonso, G. B. e Berleze, S. L. M.** - Numerical Methods for Solution of Differential Equations in Celestial Mechanics - in *Orbital Dynamics of Natural and Artificial Objects*, 155-165 (1989).
- [2] **Afonso, G. B. e Foryta, D. W.** - An Anisothermal Emission Model for Small Bodies - in *Orbital Dynamics of Natural and Artificial Objects*, 73-83 (1989).
- [3] **Afonso, G. B., Gomes, R. S. e Florczak, M. A.** - Asteroid fragments in Earth-crossing orbits - *Planet. Space Sci.* **43** , 787-795 (1995).
- [4] **Burns, J.A., Lamy, P.L. e Soter, S.** - Radiation Forces on Small Particles in the Solar System - *Icarus* **40** , 1-48 (1979).
- [5] **Chapman, C. R. e Morrison, D.** - Impacts on the Earth by asteroids and comets: assessing the hazard - *Nature* **367** , 33-40 (1994).
- [6] **Farinella, P., Gonczi, R., Froeschlé, Ch. e Froeschlé, C.** - The Injection of Asteroids Fragments into Resonances - *Icarus* **101** , 185-202 (1985).
- [7] **Peterson, C.** - A source mechanism for meteorites controlled by the Yarkovsky effect - *Icarus* **29** , 91-111 (1976).
- [8] **Shoemaker, E. M.** - Asteroid and Comet Bombardment of the Earth - *Earth Planet* **11** , 461-494 (1983).
- [9] **Williams, J. G.** - The positions of secular resonance surfaces - *Icarus* **46** , 390-399 (1981).
- [10] **Wisdom, J.** - The origin of the Kirkwood gaps: a mapping for asteroidal motions near the 3/1 commensurability - *Astron. J.* **87**, 577-593 (1982).
- [11] **Wisdom, J.** - A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability - *Icarus* **63**, 272-289 (1985).